BAYREUTHER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

ISSN 0172-1062 Heft 21, 1986

A. KERBER (ED.)

Diskrete Strukturen, algebraische Methoden und Anwendungen

Tagungsbericht 2. Sommerschule
Diskrete Strukturen, Bayreuth 1985

Schriftleitung: Prof. Dr. A. Kerber, Lehrstuhl II für Mathematik
Postfach 3008 · 8580 Bayreuth, W.-Deutschland

TRANSVERSALTHEORIE: EIN ÜBERBLICK

DIETER JUNGNICKEL

Es sollte Transversalentheorie heißen;
denn es handelt sich um eine Theorie der Verquertheit,
und nicht um eine verquerte Theorie.

(H.LÜNEBURG)

INHALT

Der Verfasser dankt Herrn A.Kerber für die Anregung, diesen Übersichtsartikel zu schreiben, sowie Herrn M.Leclerc für kritische Durchsicht des Manuskripts.

TRANSVERSALTHEORIE: EIN ÜBERBLICK

DIETER JUNGNICKEL

In diesem Artikel wollen wir einen Überblick über ein Teilgebiet der Kombinatorik, nämlich die Transversaltheorie, geben. Als die zentrale Fragestellung dieser Theorie wird im allgemeinen das Problem der Repräsentierbarkeit einer Mengenfamilie durch Elemente der einzelnen Mengen angesehen. Zunächst etwas Terminologie: Gegeben sei eine Familie **A** = $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen. Dann heißt jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in A_i$ für alle i ein Repräsentantensystem für **A**. Falls dabei für $i \neq j$ stets $a_i \neq a_j$ gilt, spricht man von einem SDR ("system of distinct representatives"). Die zugehörige Menge $\{a_i: i \in I\}$ wird dann eine Transversale genannt. Im endlichen Fall gibt der folgende fundamentale Satz von P.Hall (1935) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Transversalen an:

Heiratssatz: $\mathbf{A}=(A_1,\dots,A_n)$ sei eine endliche Familie von Teilmengen einer endlichen Menge E. Genau dann gibt es eine Transversale für **A**, wenn gilt:

$$\text{(H)} \quad \left|\bigcup_{i \in J} A_j\right| \geq |J| \quad \text{für alle } J \subset \{1,\dots,n\}.$$

Wie man sich sofort überlegt, ist in diesem Satz die Beschränkung auf eine endliche Grundmenge E überflüssig. Dagegen bleibt der Satz für unendliche Familien nicht mehr gültig. Wir werden uns in diesem Artikel stets auf den endlichen Fall (also endliche Familien von Teilmengen einer endlichen Grundmenge) beschränken. Noch ein Wort zu der Bezeichnung "Heiratssatz": Wenn man die Indexmenge als eine Menge von Herren, die Menge E als eine Menge von Damen und jede Menge A_i als die Menge derjenigen Damen in E, die der Herr i zu ehelichen bereit ist, interpretiert, so gibt der Heiratssatz tatsächlich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß jeder Herr mit einer Dame seiner Wahl verheiratet werden kann. Natürlich kann man - in der emanzipierten Ära von ERA - die Rollen von Herren und Damen auch vertauschen.

Die Transversaltheorie kann nun als eine Folge von Verfeinerungen und Anwendungen des Heiratssatzes aufgefaßt werden; dabei werden zu den "Anwendungen" üblicherweise auch Fragestellungen aus anderen Teilen der Kombinatorik, etwa über partielle Ordnungen, 0-1-Matrizen, Graphen und Netzwerke, gerechnet. Dieser Standpunkt wird z.B. in den Büchern von Mirsky (1971) und Jungnickel (1982) eingenommen. Es gibt jedoch noch einen anderen Standpunkt, der auf das klassische Buch von Ford & Fulkerson (1962) zurückgeht: Die Transversaltheorie kann auch aus der Theorie der Flüsse auf Netzwerken abgeleitet werden. Dieser Ansatz hat einerseits beweistechnische Vorteile; andererseits legt er es nahe, den algorithmischen Aspekt - der in der reinen Transversaltheorie meist zu kurz kommt - in angemessener Weise mitzubehandeln. Wir wollen in diesem Übersichtsartikel den zuletzt genannten Standpunkt einnehmen, also die Transversaltheorie als ein Teilgebiet der Kombinatorischen Optimierung auffassen. Eine ähnliche, aber wesentlich ausführlichere Darstellung des hier behandelten Stoffes wird der Leser in dem demnächst erscheinenden Buch Jungnickel (1986) finden können. Für die Kombinatorische Optimierung allgemein sei der Leser insbesondere auf die Bücher von Lawler (1976), Papadimitriou & Steiglitz (1982), Syslo, Deo & Kowalik (1983) sowie Even (1979) und Gondran & Minoux (1984) verwiesen; die beiden zuletzt genannten Werke bieten - ebenso wie dieser Artikel - einen rein graphentheoretischen Aufbau und verzichten auf die Theorie der Linearen Programmierung.

1. FLÜSSE AUF NETZWERKEN

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Ergebnisse über Flüsse zusammen. Dazu setzen wir die Kenntnis der Grundbegriffe der Graphentheorie voraus. Gegeben sei ein (endlicher) Digraph $G = (V,E)$, also ein gerichteter Graph mit Punktemenge V und Kantenmenge E, den wir o.B.d.A. als einfach (ohne Schlingen und ohne parallele Kanten) annehmen. Ferner seien zwei Punkte s und t von G ausgezeichnet, die Quelle s und die Senke t; dabei soll t von s aus erreichbar sein, d.h., es gibt einen gerichteten Weg von s nach t in G. Schließlich sei noch eine Abbildung $c: E \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben, die Kapazitätsfunktion. Dann heißt $N = (G,s,t,c)$ ein Fluß-Netzwerk oder kurz ein Netzwerk. Ein (zulässiger) Fluß auf N ist eine Abbildung $f: E \to \mathbb{R}_0^+$, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

(F1) Es gilt $0 \leq f(e) \leq c(e)$ für jede Kante e.

(F2) Für jeden Punkt $v \neq s,t$ gilt $\sum_{e^+=v} f(e) = \sum_{e^-=v} f(e)$, wobei e^- bzw. e^+ der Anfangs- bzw. Endpunkt von e sei.

Die Bedingung (F2) ist also ein Erhaltungssatz für Flüsse: In jeden Punkt (abgesehen von der Quelle und der Senke) fließt genauso viel hinein wie heraus. Durch Summation von $f(e)$ über alle Kanten e erhält man mit (F2) leicht die Gleichung

(F3) $\sum_{e^-=s} f(e) - \sum_{e^+=s} f(e) = \sum_{e^+=t} f(e) - \sum_{e^-=t} f(e)$.

Der in (F3) auftretende gemeinsame Wert wird der Wert $w(f)$ von f genannt. Ein

Fluß heißt *maximal*, wenn $w(f) \geq w(f')$ für jeden Fluß f' auf N gilt. Eines der fundamentalen Probleme der Kombinatorischen Optimierung ist nun die Bestimmung eines maximalen Flusses auf einem gegebenen Netzwerk N. Dabei ist die Existenz derartiger Flüsse keineswegs trivial; für einen Beweis benötigen wir weitere Begriffe. Ein *Schnitt* C ist eine Zerlegung $V = S \,\dot{\cup}\, T$ von V, für die $s \in S$ und $t \in T$ gilt; die *Kapazität* von C ist die Zahl $c(S,T) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in T} c(e)$, also die Summe der Kapazitäten aller Kanten e, die von S nach T führen. C heißt ein *minimaler* Schnitt, wenn für jeden Schnitt (S',T') die Bedingung $c(S,T) \leq c(S',T')$ gilt. Der folgende Hilfssatz zeigt, daß der Wert eines maximalen Flusses durch die Kapazität eines minimalen Schnitts beschränkt ist.

1.1 Lemma. N sei ein Netzwerk, (S,T) ein Schnitt und f ein Fluß. Dann gilt:

$$w(f) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in T} f(e) - \sum_{e^+ \in S, e^- \in T} f(e),$$

also insbesondere $w(f) \leq c(S,T)$.

Beweis. Durch Summation von (F2) über alle Punkte $v \in S$ folgt:

$$w(f) = \sum_{v \in S} \Big(\sum_{e^- = v} f(e) - \sum_{e^+ = v} f(e) \Big)$$

$$= \sum_{e^- \in S, e^+ \in S} f(e) - \sum_{e^+ \in S, e^- \in S} f(e) + \sum_{e^- \in S, e^+ \in T} f(e) - \sum_{e^+ \in S, e^- \in T} f(e).$$

Man beachte, daß dabei die ersten beiden Summanden 0 ergeben. Für die Abschätzung berücksichtige man noch $f(e) \geq c(e)$ für Kanten e mit $e^- \in S$ und $e^+ \in T$ bzw. $f(e) > 0$ für Kanten e mit $e^+ \in S$ und $e^- \in T$. //

Wir werden sehen, daß in Lemma 1.1 sogar die Gleichheit gelten kann: Der Wert eines maximalen Flusses stimmt mit der Kapazität eines minimalen Schnittes überein. Damit ist dann die Existenz maximaler Flüsse gesichert. Zunächst wollen wir aber die maximalen Flüsse charakterisieren. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff: W sei ein (ungerichteter) Weg von s nach t. Wir nennen jede Kante von W, die von s nach t orientiert ist, eine *Vorwärtskante* und jede entgegengesetzt orientierte Kante eine *Rückwärtskante*. Wenn für jede Vorwärtskante von W stets $f(e) > c(e)$ und für jede Rückwärtskante $f(e) > 0$ gilt, heißt W ein *zunehmender Weg* (bzgl. f). Die drei folgenden grundlegenden Sätze stammen von Ford & Fulkerson (1956).

1.2 Satz ("augmenting path theorem"). Ein Fluß f auf einem Netzwerk N ist genau dann maximal, wenn es keinen bzgl. f zunehmenden Weg gibt.

Beweis. Zunächst sei f ein maximaler Fluß. Angenommen, es gibt einen zunehmenden Weg W von s nach t. Es sei d das Minimum der Werte f(e)-c(e) (e Vorwärtskante in W) bzw. f(e) (e Rückwärtskante). Nach Definition ist d also eine positive Zahl. Wir erklären eine Abbildung f' wie folgt:

$$f'(e) := \begin{cases} f(e)+d & \text{für Vorwärtskanten } e \\ f(e)-d & \text{für Rückwärtskanten } e \\ f(e) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f' ein Fluß mit $w(f') = w(f)+d > w(f)$. Widerspruch!

Umgekehrt gebe es nun keinen zunehmenden Weg bzgl. f von s nach t. Es sei S die Menge aller Punkte v, für die ein zunehmender Weg von s nach v existiert (s eingeschlossen) und $T = V \setminus S$. Nach Voraussetzung ist dann (S,T) ein Schnitt. Man beachte, daß jede Kante e mit $e^- \in S$ und $e^+ \in T$ gesättigt sein muß (d.h. f(e)=c(e)); ähnlich muß jede Kante e mit $e^+ \in S$ und $e^- \in T$ leer sein (d.h. f(e)=0). Aus Lemma 1.1 folgt daher w(f)=c(S,T), weswegen f maximal ist. //

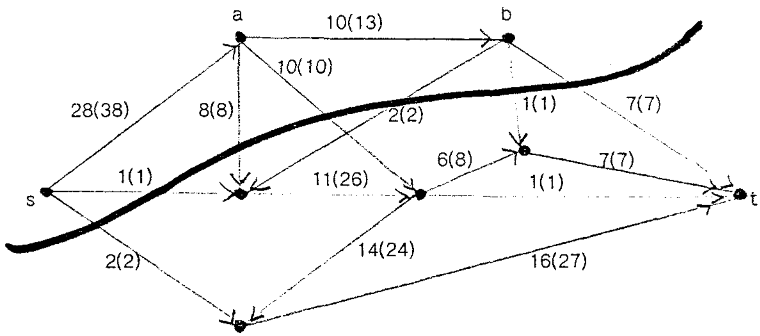
1.3 Satz ("integral flow theorem"). N sei ein Netzwerk, für das alle Kapazitäten c(e) ganze Zahlen sind. Dann gibt es einen ganzzahligen maximalen Fluß auf N.

Beweis. Durch $f_0(e) := 0$ wird offenbar ein ganzzahliger Fluß f_0 (vom Wert 0) auf N definiert. Wenn dieser Fluß nicht maximal ist, gibt es einen zunehmenden Weg bzgl. f_0. Die im Beweis von Satz 1.2 auftretende Zahl d ist hier eine positive ganze Zahl, weswegen wir einen ganzzahligen Fluß f_1 vom Wert d konstruieren können (wie im Beweis von 1.2 beschrieben). Dieses Verfahren wird entsprechend fortgesetzt; da in jedem Schritt der Flußwert um eine positive ganze Zahl erhöht wird und die Kapazität eines minimalen Schnittes nach 1.1 eine obere Schranke für den Flußwert ist, erhalten wir so in endlich vielen Schritten einen ganzzahligen maximalen Fluß. //

1.4 Satz ("max-flow min-cut theorem"). N sei ein Netzwerk. Dann ist der maximale Wert eines Flusses gleich der minimalen Kapazität eines Schnittes.

Beweis. Im Fall ganzzahliger Kapazitäten folgt die Behauptung aus Satz 1.3 und dem Beweis von Satz 1.2, wo wir für jeden maximalen Fluß einen Schnitt der entsprechenden Kapazität konstruiert haben. Der Fall rationaler Kapazitäten kann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner der auftretenden Zahlen auf den ganzzahligen Fall reduziert werden. Schließlich folgt der Fall reeller Kapazitäten dann aus Stetigkeitsgründen. //

Die angegebenen Beweise legen gleichzeitig einen Algorithmus zur Berechnung maximaler Flüsse nahe: Man sollte, mit dem Nullfluß f_0 beginnend, den jeweils konstruierten Fluß entlang zunehmender Wege abändern, bis man einen maximalen Fluß erreicht hat. Bevor wir diesen Algorithmus formulieren, zunächst noch ein Beispiel zu Satz 1.4:



Für dieses Netzwerk ist ein maximaler Fluß (sowie in Klammern die Kapazitäten) *eingezeichnet; außerdem ist der minimale Schnitt* (S,T) *mit* S = {s,a,b} *angedeutet.* Der gemeinsame Wert w(f)=c(S,T) beträgt hier 31. Der Leser sollte als Übung den jetzt zu beschreibenden Algorithmus auf das angegebene Netzwerk anwenden und so den eingezeichneten Fluß konstruieren.

1.5 Algorithmus ("labelling algorithm"). Gegeben sei ein Netzwerk N=(G,s,t,c).

(1) Setze f(e) $\leftarrow$ 0 für jede Kante e.
(2) Markiere s mit $(-,\infty)$. Setze d(s) $\leftarrow \infty$.
(3) Setze u(v) $\leftarrow$ false für alle Punkte v.
(4) Falls u(v)=true für alle markierten Punkte v gilt, weiter bei (17).
(5) Wähle unter allen Punkten mit u(v)=false den zuerst markierten Punkt.
(6) Für jede Kante e=(v,w), für die w nicht markiert ist und für die f(e) < c(e) gilt: Setze d(w) $\leftarrow$ min{f(e)-c(e),d(v)} und markiere w mit (v,+,d(w)).
(7) Für jede Kante e=(w,v), für die w nicht markiert ist und für die f(e) > 0 gilt: Setze d(w) $\leftarrow$ min{f(e),d(v)} und markiere w mit (v,-,d(w)).
(8) Setze u(v) $\leftarrow$ true.
(9) Falls t nicht markiert ist, weiter bei (4).
(10) d sei die letzte Komponente der Markierung von t.
(11) w $\leftarrow$ t.
(12) Falls w=s, lösche alle Markierungen und gehe nach (2).
(13) Finde die erste Komponente v der Markierung von w.
(14) Falls die zweite Komponente der Markierung von w das Symbol + ist, sei e=(v,w). Setze f(e) $\leftarrow$ f(e)+d.
(15) Es sei e=(w,v). Setze f(e) $\leftarrow$ f(e)-d.
(16) w $\leftarrow$ v und weiter bei (12).
(17) Bilde die Liste S aller markierten Punkte und setze T $\leftarrow$ V$\setminus$S.

In Schritt (1) wird also zunächst f als der Nullfluß angesetzt. Dann werden in (2) bis (9) von s ausgehend die Punkte von G markiert; dabei gibt der Wert d(v) jeweils an, um wieviel man entlang einem zunehmenden Weg von s nach v den Fluß f abändern könnte. Die erste Komponente der Markierung von v ist der Vorgänger von v auf einem derartigen zunehmenden Weg, die zweite Komponente gibt an, ob man eine Vorwärts- oder eine Rückwärtskante verwendet hat. In dieser Schleife sind zwei Fälle möglich: Entweder t wird erreicht; dann wird in (10) bis (16) der bisher vorhandene Fluß - wie im Beweis von Satz 1.2 - entsprechend abgeändert. Oder t kann nicht erreicht werden; dann ist der konstruierte Fluß schon maximal und in (17) wird der zugehörige minimale Schnitt angegeben. Es ist klar, daß dieser Algorithmus zumindest im Fall rationaler Kapazitäten in endlich vielen Schritten einen maximalen Fluß konstruiert. In der ursprünglichen Formulierung von Ford & Fulkerson (1956) konnte in (5) ein beliebiger markierter Punkt ausgewählt werden; dann konnte das Verfahren für reelle Kapazitäten versagen. Die hier angegebene Spezialisierung von (5) stammt von Edmonds & Karp (1972) und stellt die Konvergenz des Verfahrens auch im reellen Fall sicher (In der Praxis ist der reelle Fall natürlich irrelevant.). Diese Spezialisierung läuft darauf hinaus, daß man in jeder Phase des Verfahrens einen zunehmenden Weg mit möglichst wenig Kanten wählt. Diese Variante hat noch einen weiteren Vorteil: Man erhält so einen "effizienten" Algorithmus.

Dazu benötigen wir allerdings wenigstens die Sprechweise der Komplexitätstheorie (für die wir auf das Standardwerk von Garey & Johnson (1979) verweisen). Man mißt für jede Anwendung des Algorithmus die "Größe" der Eingabedaten; für Netzwerke eignet sich dabei z.B. die Mächtigkeit der Punktemenge V bzw. der Kantenmenge E. Wir sagen, daß ein Algorithmus Komplexität $O(f(|V|,|E|))$ hat, wenn es eine Konstante c gibt, so daß für jedes Netzwerk mit $|V|$ Punkten und $|E|$ Kanten der Algorithmus höchstens $cf(|V|,|E|)$ Schritte benötigt. (Dabei wäre natürlich noch der Begriff "Schritt" zu präzisieren; häufig zählt man z.B. die Anzahl arithmetischer Operationen und Vergleiche.) Dann gilt:

1.6 Satz (Edmonds & Karp 1972). Algorithmus 1.5 berechnet einen maximalen Fluß mit Komplexität $O(|V||E|^2)$.

Für einen Beweis von Satz 1.6 sei der Leser etwa auf Lawler (1976) oder Jungnickel (1986) verwiesen. Da wir den zugrundeliegenden Graphen G o.B.d.A. als einfach und zusammenhängend voraussetzen können, liegt die in 1.6 angegebene Komplexität je nach der Dichte von G zwischen $O(|V|^3)$ und $O(|V|^5)$. In der Zwischenzeit sind Algorithmen mit besserer Komplexität gefunden worden; erwähnt seien die von Dinic (1970) mit Komplexität $O(|V|^2|E|)$ und von Malhotra, Kumar & Maheshwari (1978) mit Komplexität $O(|V|^3)$. Auf die Darstellung dieser komplizierteren Verfahren (deren Grundidee es ist, mehrere Abänderungen in "Phasen" zusammenzufassen) sei hier verzichtet; wir verweisen auf Even (1979), Papadimitriou & Steiglitz (1982) und Jungnickel (1986). In diesen Büchern findet man auch das folgende Resultat, das für die in den folgenden Abschnitten betrachteten kombinatorischen Anwendungen der Flüsse von großer Bedeutung ist:

1.7 Satz. N sei ein 0-1-Netzwerk, d.h. ein Netzwerk, für das c(e) nur die Werte 0 und 1 annimmt. Dann kann man einen maximalen (ganzzahligen) Fluß auf N mit Komplexität $O(|V|^{2/3}|E|)$ bestimmen. Falls außerdem jeder Punkt $v \neq s,t$ höchstens einmal als Anfangspunkt oder höchstens einmal als Endpunkt einer Kante vorkommt, kann diese Komplexität zu $O(|V|^{1/2}|E|)$ verbessert werden.

2. DISJUNKTE WEGE

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Gruppe von Sätzen, die als Variationen des berühmten Satzes von Menger (1927) angesehen werden können. Es geht dabei um die Existenz disjunkter Wege in (gerichteten) Graphen. Zunächst einige Definitionen: G sei ein (gerichteter) Graph; s und t seien zwei Punkte von G. Dann heißen (gerichtete) Wege von s nach t kantendisjunkt, wenn keine Kante von G auf mehr als einem dieser Wege liegt. Analog heißen Wege von s nach t eckendisjunkt, wenn (außer s und t) kein Punkt auf mehr als einem der Wege liegt. Eine Menge A von Kanten heißt eine s und t trennende Kantenmenge, wenn jeder (gerichtete) Weg von s nach t mindestens eine Kante aus A enthält; eine Teilmenge W von $V \setminus \{s,t\}$ heißt eine s und t trennende Punktemenge, wenn jeder (gerichtete) Weg von s nach t mindestens einen Punkt in W enthält.

2.1 Satz (Ford & Fulkerson 1956). G sei ein (gerichteter) Graph, und s und t seien zwei Punkte von G. Dann ist die Maximalzahl kantendisjunkter Wege von s nach t gleich der minimalen Mächtigkeit einer s und t trennenden Kantenmenge.

Beweis. Zunächst sei G ein Digraph und N das Netzwerk auf G, für das jede Kante Kapazität 1 hat. O.B.d.A. sei t von s aus erreichbar. Offenbar induzieren je k kantendisjunkte Wege von s nach t einen Fluß vom Wert k auf N: Man setzt f(e)=1 genau für die Kanten, die in einem der Wege vorkommen, und f(e)=0 sonst. Umgekehrt zeigt der Beweis von Satz 1.3, daß man einen (ganzzahligen) maximalen Fluß auf N durch schrittweise Augmentation (jeweils um 1) längs zunehmender Wege aus dem Nullfluß erhalten kann; da jede Kante Kapazität 1 hat, müssen die dabei vorkommenden Wege kantendisjunkt sein. Also ist die Anzahl kantendisjunkter Wege in G gleich dem maximalen Flußwert in N. Die Behauptung folgt somit aus Satz 1.4, wenn wir noch zeigen können, daß die minimale Mächtigkeit einer trennenden Kantenmenge in G gleich der Kapazität eines minimalen Schnittes in N ist. Offenbar induziert jeder Schnitt (S,T) von N in G die trennende Kantenmenge $\{e: e^-\in S, e^+\in T\}$ der Mächtigkeit c(S,T). Umgekehrt sei eine minimale trennende Kantenmenge A in G gegeben. Es sei S_A die Menge aller Punkte v, die von s aus auf einem Weg erreichbar sind, der keine Kante in A enthält, und $T_A := V \setminus S_A$. Offenbar ist dann (S_A, T_A) ein Schnitt in N. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß t von jedem Punkt von G aus erreichbar ist. Dann muß jede Kante e mit $e^-\in S$ und $e^+\in T$ in A enthalten sein; wegen der Minimalität von A besteht A genau aus diesen Kanten und ist daher von einem Schnitt induziert. Damit ist der Satz für den gerichteten Fall bewiesen. Der Fall eines ungerichteten Graphen wird nun auf den schon behandelten Fall zurückgeführt, indem man jede Kante {a,b} durch zwei Kanten (a,b) und (b,a) ersetzt. //

Aus Satz 1.7 und dem Beweis von Satz 2.1 folgt unmittelbar ein Verfahren zur Bestimmung kantendisjunkter Wege:

2.2 Korollar. G sei ein einfacher (gerichteter) Graph. Dann kann die Maximalzahl kantendisjunkter Wege von s nach t in G mit Komplexität $O(|V|^{2/3}|E|)$ bestimmt werden.

2.3 Satz (Menger 1927). G sei ein (gerichteter) Graph, und s und t seien zwei Punkte von G, die nicht durch eine Kante verbunden sind. Dann ist die maximale Anzahl eckendisjunkter Wege von s nach t gleich der minimalen Mächtigkeit einer s und t trennenden Kantenmenge.

Beweis. O.B.d.A. sei G ein Digraph; der ungerichtete Fall kann wie in 2.1 auf den gerichteten zurückgeführt werden. Wir definieren einen Digraphen G' wie folgt: Die Punkte von G' sind s und t, sowie für jeden Punkt $v\neq s,t$ von G zwei Punkte v^- und v^+. Für jede Kante (s,v) bzw. (v,t) von G enthält G' eine Kante (s,v^-) bzw. (v^+,t). Für jede Kante (a,b) in G mit $a,b\neq s,t$ enthält G' die Kante (a^+,b^-). Schließlich enthält G' für jeden Punkt $v\neq s,t$ von G die Kante (v^-,v^+). Man sieht sofort, daß eckendisjunkte Wege in G dann kantendisjunkten Wegen in G' entsprechen. Nach Satz 2.1 ist somit die Maximalzahl eckendisjunkter Wege in G gleich der minimalen Mächtigkeit einer s und t in G' trennenden Kantenmenge. Man überzeugt sich leicht davon, daß man o.B.d.A. annehmen kann, daß eine derartige Kantenmenge nur Kanten der Form (v^-,v^+) enthält und somit einer trennenden Eckenmenge in G entspricht. //

2.4 Korollar. G sei ein einfacher (gerichteter) Graph, und s und t seien zwei unverbundene Punkte von G. Dann kann die Maximalzahl eckendisjunkter Wege von s nach t mit Komplexität $O(|V|^{2/3}|E|)$ bestimmt werden.

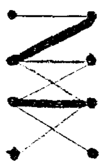
Die genannten Sätze können dazu verwendet werden, die "Stärke" des Zusammenhangs eines Graphen zu messen. Sei also G ein (o.B.d.A.) einfacher Graph. Die Zusammenhangszahl $\kappa(G)$ von G ist wie folgt erklärt: Wenn G der vollständige Graph K_n ist, sei $\kappa(G) = n-1$. Sonst sei $\kappa(G)$ die minimale Mächtigkeit einer Menge $T \subset V$, für die $G \setminus T$ nicht zusammenhängend ist. Dabei bezeichnet $G \setminus T$ den Graphen, der aus G durch Weglassen sämtlicher Punkte in T und der mit ihnen inzidenten Kanten hervorgeht. Der Leser möge als Übung (mit Satz 2.3) das folgende Ergebnis zeigen:

2.5 Satz (Whitney 1932). Ein einfacher Graph ist genau dann k-fach zusammenhängend (d.h., es gilt $\kappa(G) \geq k$), wenn je zwei Punkte durch mindestens k paarweise eckendisjunkte Wege verbunden sind.

Man beachte dabei, daß im Vergleich zu 2.3 auch adjazente Punktepaare zugelassen sind. Man kann zeigen, daß $\kappa(G)$ mit Komplexität $O(|V|^{1/2}|E|^2)$ bestimmt werden kann, siehe etwa Even (1979). Dies ist verhältnismäßig aufwendig; will man nur den k-fachen Zusammenhang testen, geht das für k=1 mit einem gewöhnlichen breadth *first search* bereits mit Komplexität $O(|E|)$. Dieses Resultat bleibt auch noch für k=2 und k=3 gültig, siehe Tarjan (1972) bzw. Hopcroft & Tarjan (1973). Zum k-fachen Zusammenhang vergleiche man auch Even (1979). Es sei dem Leser überlassen, Varianten von Satz 2.5 für den gerichteten Fall sowie für "Kantenzusammenhang" zu formulieren.

3. KORRESPONDENZEN

In diesem Abschnitt werden wir die Resultate aus Abschnitt 2 weiter spezialisieren. G sei ein (o.B.d.A. einfacher) Graph. Eine Korrespondenz K ist eine Menge von Kanten von G, für die keine zwei Kanten einen gemeinsamen Endpunkt haben. Eine maximale Korrespondenz ist eine Korrespondenz maximaler Mächtigkeit. Diese übliche Terminologie ist etwas unglücklich, da man unter einer maximalen Korrespondenz wohl besser eine Korrespondenz verstehen sollte, die in keiner größeren Korrespondenz enthalten ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, fallen beide Begriffe im Allgemeinen nicht zusammen:



Die fett eingezeichnete Korrespondenz kann zwar nicht erweitert werden; es gibt aber Korrespondenzen mit 4 Kanten. Die Klasse derjenigen Graphen, für die jede nicht-erweiterbare Korrespondenz schon maximal ist ("equi-matchable graphs") ist erst kürzlich befriedigend (d.h., auch algorithmisch gut überprüfbar) gekennzeichnet worden, siehe Lesk, Plummer & Pulleyblank (1984). Die klassischen Resultate über Korrespondenzen beziehen sich auf bipartite Graphen (also Graphen G, deren Punktemenge V so in zwei Teilmengen S und T zerlegt werden kann, daß es lediglich Kanten gibt, die einen Endpunkt in S und den anderen Endpunkt in T haben). Wir benötigen noch einen weiteren Begriff: Eine überdeckende Punktemenge in einem Graphen G ist eine Teilmenge W von V, für die jede Kante von G mindestens einen ihrer Endpunkte in W hat. Dann gilt:

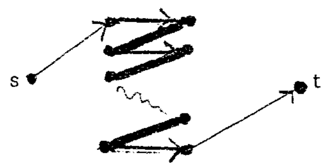
3.1 Satz (König 1931, Egerváry 1931). G sei ein bipartiter Graph. Dann ist die maximale Mächtigkeit einer Korrespondenz in G gleich der minimalen Mächtigkeit einer überdeckenden Punktemenge.

Beweis. Wir konstruieren aus G einen Digraphen G', dessen Punktemenge diejenige von G zusammen mit zwei neuen Punkten s und t ist. Die Zerlegung der Punktemenge von G sei $V = S \dot{\cup} T$. Als Kanten von G' wählen wir (s,s') (für jedes $s' \in S$), (t',t) (für jedes $t' \in T$) und (u,v) (für jede Kante {u,v} von G mit $u \in S$ und $v \in T$). Dann entsprechen die Korrespondenzen in G den Mengen eckendisjunkter Wege von s nach t in G'; ähnlich entsprechen die überdeckenden Punktemengen von G den s und t trennenden Eckenmengen in G'. Die Behauptung folgt somit aus Satz 2.3. //

Auf dem Umweg über 2.4 und 2.2 kann man also maximale Korrespondenzen über Flüsse bestimmen. Allerdings ist - wie sich der Leser klarmachen möge - die im Beweis von Satz 2.3 vorgenommene Aufspaltung der Punkte in diesem Spezialfall überflüssig: Man kann dem zu konstruierenden Netzwerk hier einfach den im Beweis von Satz 3.1 beschriebenen Digraphen G' zugrundelegen und alle Kanten mit Kapazität 1 versehen. Dann folgt aus Satz 1.7:

3.2 Korollar (Hopcroft & Karp 1973). G sei ein bipartiter Graph. Dann kann man mit Komplexität $O(|V|^{5/2})$ eine maximale Korrespondenz in G bestimmen.

Es ist instruktiv, sich zu überlegen, wie die zunehmenden Wege im zugehörigen Fluß-Netzwerk N im gegebenen bipartiten Graphen G aussehen. Wie man unschwer einsieht, haben sie die folgende Gestalt:



Dabei sind die fett eingezeichneten Kanten Rückwärtskanten im zunehmenden Weg in N; dies sind genau die Kanten des Weges, die in G in der zum vorhandenen Fluß gehörenden Korrespondenz liegen. Das legt die Definition eines zunehmenden Weges (bzgl. einer gegebenen Korrespondenz) in einem beliebigen Graphen G nahe: Das ist ein alternierender Weg (also ein Weg, auf dem sich Kanten der Korrespondenz mit Kanten abwechseln, die nicht in K liegen), dessen Endpunkte exponiert sind (also auf keiner Kante der Korrespondenz liegen). Dann gilt der folgende Satz von Berge (1957):

3.3 Satz ("augmenting path theorem"). K sei eine Korrespondenz in einem Graphen G. Genau dann ist K maximal, wenn es in G keinen bzgl. K zunehmenden Weg gibt.

Die vorhergehende Diskussion zeigt, daß Satz 3.3 im Fall eines bipartiten Graphen G ein Spezialfall von Satz 1.2 ist. Der allgemeine Fall sei dem Leser als Übung überlassen. Der Leser überzeuge sich auch davon, daß Satz 3.1 für beliebige Graphen nicht korrekt ist. Auf Satz 3.3 kann man aber auch für beliebige Graphen *Algorithmen zur Bestimmung einer maximalen Korrespondenz aufbauen*; der erste derartige Algorithmus stammt von Edmonds (1965). Zu diesem Thema - das nicht mit Flüssen behandelt werden kann und somit auch nicht zur Transversaltheorie zu zählen ist - vergleiche man etwa Lawler (1976) und Papadimitriou & Steiglitz (1982) oder Jungnickel (1986).

Wir wollen jetzt aus Satz 3.2 ein Resultat ableiten, das als Übersetzung des Heiratssatzes in die Sprache der Graphentheorie angesehen werden kann. Dazu sei G wieder ein bipartiter Graph; die gegebene Zerlegung der Punktemenge von G sei $V = S \,\dot{\cup}\, T$. O.B.d.A. sei $|T| \leq |S|$. Dann heißt jede Korrespondenz der Mächtigkeit $|T|$ von G eine vollständige Korrespondenz. Im Fall $|S| = |T|$ spricht man auch von einer perfekten Korrespondenz.

3.4 Satz (*P.Hall 1935*). *G sei ein bipartiter Graph auf der Punktemenge* $V=S \,\dot{\cup}\, T$ mit $|T| \leq |S|$. Für $J \subset T$ bezeichne $\Gamma(J)$ die Menge aller Punkte $v \in S$, für die es eine Kante $\{v,u\}$ mit $u \in J$ gibt. Genau dann gibt es in G eine vollständige Korrespondenz, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

(H') $|\Gamma(J)| \geq |J|$ für jede Teilmenge J von T.

Beweis. Die angegebene Bedingung ist offenbar notwendig: Wenn K eine vollständige Korrespondenz von G ist, so bilden die in S enthaltenen Endpunkt der Kanten von K, deren Endpunkt in T sogar in J liegt, für jedes $J \subset T$ eine Teilmenge der Mächtigkeit $|J|$ von $\Gamma(J)$. Umgekehrt sei nun Bedingung (H') erfüllt. Angenommen, die maximale Mächtigkeit einer Korrespondenz in G wäre $< |T|$. Nach Satz 3.1 gibt es dann eine überdeckende Punktemenge $W = S' \,\dot{\cup}\, T'$ mit $S \subset S'$ und $T \subset T'$ sowie

$|S'|+|T'| < |T|$. Dann sind aber die Endpunkte u derjenigen Kanten $\{u,v\}$, für die v einer der $|T|-|T'|$ Punkte in $T \setminus T'$ ist, sämtlich in S' enthalten, weswegen also

$$|\Gamma(T \setminus T')| \leq |S'| < |T|-|T'| = |T \setminus T'|$$

gilt, im Widerspruch zu (H'). //

4. PARTIELLE TRANSVERSALEN

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst Satz 3.4 in die Sprache der Mengenfamilien übersetzen und so den Heiratssatz beweisen. Es sei also **A** $= (A_1,\dots,A_n)$ eine Familie von Teilmengen einer Menge S. Wir schreiben $T = \{1,\dots,n\}$ und erklären einen bipartiten Graphen G auf der Punktemenge $S \,\dot\cup\, T$, dessen Kanten genau diejenigen $\{s,t\}$ sind, für die $s \in A_t$ ist. Dann entsprechen die SDR's von **A** gerade den vollständigen Korrespondenzen von G. Nach Satz 3.4 existiert also genau dann ein SDR und somit eine Transversale für **A**, wenn in G die Bedingung (H') erfüllt ist. Nach Definition von G besteht aber $\Gamma(J)$ für jede Teilmenge J von T genau aus den Punkten, die in mindestens einer der Mengen A_t mit $t \in J$ liegen. Die Bedingung (H') für G ist also genau die Bedingung (H) für **A**, womit der Heiratssatz bewiesen ist. Für einen direkten Beweis des Heiratssatzes verweisen wir z.B. auf Mirsky (1971) oder Jungnickel (1982); wir wollen den gängigsten Beweis allerdings als Übung skizzieren:

4.1 Übung. Man beweise den Heiratssatz mit Induktion über n. Dabei unterscheide man die Fälle, in denen es eine kritische Teilfamilie von **A** (d.h. eine Teilfamilie $(A_i)_{i \in J}$ mit $|\bigcup_{i \in J} A_i| = |J| < n$) gibt bzw. nicht gibt.

Natürlich ist der eben angedeutete Beweis des Heiratssatzes viel kürzer als der von uns durchgeführte. Man kann dann aus dem Heiratssatz umgekehrt die Sätze von König-Egerváry, Menger und Ford & Fulkerson ableiten (siehe z.B. Jungnickel (1982)); dieser Weg ist dann allerdings sehr viel mühsamer als der hier eingeschlagene. Außerdem gibt der in 4.1 skizzierte Beweis keinen brauchbaren Algorithmus zur Bestimmung eines SDR, während die Übersetzung in die Sprache der bipartiten Graphen dies durch Rückführung auf zunehmende Wege (direkt im Graphen oder im zugehörigen Netzwerk) mitliefert. Als Übung betrachte der Leser die Mengenfamilie **A** mit $A_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $A_2 = \{2,3,4,5,7,8\}$, $A_3 = \{1,2,3,4\}$, $A_4 = \{3,4\}$, $A_5 = \{1,2,3\}$, $A_6 = \{4,5,7\}$ und $A_7 = \{1,3,4\}$. Man konstruiere zunächst eine erste Korrespondenz im zugehörigen Graphen, indem man jeweils das kleinstmögliche Element von A_i (in der natürlichen Reihenfolge) als Repräsentanten wählt. Dann verwende man zunehmende Wege, um eine vollständige Korrespondenz zu erhalten. Man vergleiche dieses Verfahren mit dem Algorithmus von M.Hall (1956) zur Bestimmung eines SDR's, siehe Jungnickel (1982) S.17ff.

Wir werden nun mit dem Heiratssatz einige weitere Resultate der engeren Transversaltheorie beweisen. Zunächst wieder etwas Terminologie: Ein SDR für eine Teilfamilie $(A_i)_{i \in J}$ von **A** heißt ein partielles SDR für **A**; die zugehörige Repräsentantenmenge $\{a_i: i \in J\}$ heißt eine partielle Transversale von **A**. Der Heiratssatz unterscheidet lediglich zwischen Mengenfamilien, die eine Transversale besitzen, und solchen, für die das nicht der Fall ist. Ein feineres Maß für die "Repräsentierbarkeit" einer Mengenfamilie ist der Transversalindex t(**A**), also die maximale Mächtigkeit einer partiellen Transversalen von **A**. Unter dem Defekt einer partiellen Transversale versteht man die Zahl n-k, wobei k die Mächtigkeit der partiellen Transversalen und n die Zahl der Mengen in **A** ist; dann können wir also t(**A**) auch als n minus dem minimalen Defekt einer partiellen Transversalen erklären. Aus dem Heiratssatz erhält man ziemlich leicht eine Bedingung für die Existenz von partiellen Transversalen mit gegebenem Defekt:

4.2 Satz (Defektform des Heiratssatzes). $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in I}$ mit $I = \{1,..,n\}$ sei eine Familie von Teilmengen einer Menge S. Genau dann besitzt **A** eine partielle Transversale der Mächtigkeit k (also des Defektes n-k), wenn gilt:

$$\text{(D)} \quad \left| \bigcup_{i \in J} A_i \right| \geq |J|+k-n \qquad \text{für alle } J \subset I.$$

Beweis. Es sei D eine beliebige zu S disjunkte Menge der Mächtigkeit n-k. Wir definieren eine Familie $\mathbf{A}' = (A_i')_{i \in I}$ von Teilmengen von $S \cup D$ durch $A_i' := A_i \cup D$. Aufgrund des Heiratssatzes hat **A'** genau dann eine Transversale, wenn (H) für **A'**, also (D) für **A** erfüllt ist. Jede Transversale von **A'** liefert aber durch Weglassen der in ihr enthaltenen Elemente aus D eine partielle Transversale mit mindestens n-k Elementen von **A**; umgekehrt wird jede partielle Transversale der Mächtigkeit n-k von **A** durch Hinzufügen von D zu einer Transversalen von **A'**. //

4.3 Korollar. Der minimale Defekt einer partiellen Transversalen von **A** ist

$$d(\mathbf{A}) = \max \{|J| - |\bigcup_{i \in J} A_i|: J \subset I\}.$$

Für den Transversalindex folgt t(**A**) = n-d(**A**).

Auch Satz 3.1 liefert eine Formel für den Transversalindex; der Leser möge die entsprechende Übersetzung als Übung durchführen. Wir wollen als nächstes die partiellen Transversalen einer Mengenfamilie charakterisieren.

4.4 Satz. $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in I}$ sei eine endliche Familie von Teilmengen einer Menge S.

Genau dann ist eine Teilmenge X von S eine partielle Transversale für **A**, wenn gilt:

$$\text{(PT)} \quad \left|\bigcup_{i\in J} A_i \cap X\right| \geq |J|+|X|-|I| \quad \text{für alle } J \subset I.$$

Beweis. X ist offenbar genau dann eine partielle Transversale von **A**, wenn es eine partielle Transversale von $\mathbf{A}' := (A_i \cap X)_{i \in I}$ ist, d.h., wenn **A'** eine partielle Transversale der Mächtigkeit $|X|$ hat. Die Behauptung folgt aus Satz 4.2. //

Satz 4.4 und der Heiratssatz erlauben es bereits, den folgenden wichtigen Satz zu beweisen; da die Einzelheiten etwas kompliziert sind, verweisen wir nur auf die Literatur, etwa Mirsky (1971) oder Jungnickel (1982).

4.5 Satz (Mendelsohn & Dulmage 1958). $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in I}$ sei eine endliche Familie von Teilmengen einer Menge S; ferner sei **A'** eine Teilfamilie von **A** und S' eine Teilmenge von S. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) **A'** hat eine Transversale, und S' ist eine partielle Transversale für **A**.

(ii) Es gibt eine S' umfassende Teilmenge S" von S und eine **A'** umfassende Teilfamilie **A"** von **A**, so daß S" eine Transversale für **A"** ist.

4.6 Korollar (Fortsetzungssatz von M.Hall (1956)). **A** sei eine endliche Familie von Teilmengen einer Menge S, die eine Transversale besitzt. Dann kann jede partielle Transversale von **A** zu einer Transversalen fortgesetzt werden.

Wir werden in Abschnitt 8 einen anderen Beweis für Korollar 4.6 kennenlernen. Man beachte, daß aus 4.6 nicht folgt, daß man jedes partielle SDR zu einem SDR fortsetzen kann; im allgemeinen muß die Zuordnung der schon gewählten Repräsentanten abgeändert werden. Ein Beispiel dafür liefert die zuvor (nach 4.1) angegebene Mengenfamilie. Wegen der Wichtigkeit von Satz 4.5 wollen wir noch die Übersetzung dieses Resultats in die Sprache der bipartiten Graphen angeben. Dazu noch eine Sprechweise: Wir sagen, eine Korrespondenz K in einem Graphen G trifft eine Teilmenge W der Punktemenge von G, wenn W eine Teilmenge der Endpunkte der Kanten in K ist. Damit wird aus Satz 4.5:

4.5' Satz. G sei ein bipartiter Graph auf der Punktemenge $V = S \,\dot\cup\, T$, und K und K' seien zwei Korrespondenzen in G. Ferner sei S' die Menge aller Endpunkte von Kanten von K, die in S liegen; ähnlich sei T' die Menge aller Endpunkte von Kanten von K', die in T liegen. Dann gibt es eine Korrespondenz K" in G, die $S' \cup T'$ trifft.

Einen anschaulichen Beweis dieser Formulierung des Satzes von Mendelsohn & Dulmage findet man bei Lawler (1976) skizziert. Der Kuriosität halber sei noch das folgende Resultat erwähnt:

4.7 Satz ("Haremssatz", Halmos & Vaughan 1950). $A = (A_i)_{i \in I}$ sei eine endliche Familie von Teilmengen einer Menge S, und $(p_i)_{i \in I}$ sei eine Familie natürlicher Zahlen. Genau dann existiert eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter Mengen mit $X_i \subset A_i$ und $|X_i| = p_i$ für alle i, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

(HV) $\quad |\bigcup_{i \in J} A_i| \geq \sum_{i \in J} p_i \quad$ für alle $I \subset J$.

Zum Beweis wendet man den Heiratssatz auf die Familie **B** an, die aus **A** hervorgeht, indem man A_i durch p_i Kopien von A_i ersetzt (für alle i). Die Einzelheiten seien dem Leser als Übung überlassen, ebenso wie eine Erklärung des Namens "Haremssatz". *Die Sätze 4.2, 4.4, 4.5 und 4.6 sind Beispiele dafür, wie man aus dem* Heiratssatz durch Anwendung auf geeignete Hilfsfamilien weitere Sätze erhält; der Heiratssatz ist in diesem Sinne ein "selbst-verstärkendes" Resultat, worauf wohl zuerst Mirsky (1979) hingewiesen hat.

5. KOMBINATORIK VON MATRIZEN

In diesem Abschnitt betrachten wir einige kombinatorische Sätze über Matrizen. Zunächst werden wir eine Übersetzung des Satzes von König-Egerváry angeben. Wir benötigen wieder etwas Terminologie: A sei eine $(m \times n)$-Matrix, für die wir eine gewisse Teilmenge der Zellen (i,j) $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ als zulässig auszeichnen; oft werden dabei die Einträge $\neq 0$ als zulässig ausgewählt. Eine Menge Z von Zellen von A heißt unabhängig, wenn keine zwei Zellen in Z zu derselben Zeile oder Spalte von A gehören. Der Term-Rang $\rho(A)$ von A ist die maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Menge von Zellen von A. Als gemeinsamen Oberbegriff für Zeilen und Spalten verwenden wir den Term Reihe. Wir konstruieren nun zu A einen bipartiten Graphen G auf der Punktemenge $S \mathbin{\dot\cup} T$ mit $S = \{1,\dots,m\}$ und $T = \{1,\dots,n\}$; dabei sei $\{i,j\}$ genau dann eine Kante von G (mit $i \in S$ und $j \in T$), wenn die Zelle (i,j) zulässig ist. Dann entsprechen die Korrespondenzen von G den unabhängigen Mengen zulässiger Zellen von A; ferner entsprechen überdeckende Punktemengen von G denjenigen Mengen von Reihen von A, die sämtliche zulässigen Zellen enthalten. Somit erhalten wir aus Satz 3.1:

5.1 Satz (König 1931, Egerváry 1931). Der Term-Rang $\rho(A)$ ist die minimale Zahl von Reihen von A, die sämtliche zulässigen Zellen enthalten.

Sei jetzt etwa $m \geq n$. Dann kann man Satz 3.4 (also den Heiratssatz) in eine Bedingung für $\rho(A)=n$ übersetzen; dies sei dem Leser als Übung überlassen. Ab jetzt betrachten wir den Spezialfall $m=n$, also quadratische Matrizen. Dann wird eine unabhängige Menge von n Zellen eine Diagonale genannt. Eine Diagonale heißt eine Nichtnull-Diagonale bzw. eine positive Diagonale, wenn der Eintrag von A in jeder ihrer Zellen $\neq 0$ bzw. positiv ist. Schließlich ist die Weite einer $(r \times s)$-Matrix die Zahl $r+s$. Wir zeichnen nun die Zellen mit Eintrag $\neq 0$ von A als zulässig aus. Der entsprechende Spezialfall von Satz 3.4 lautet dann wie folgt:

5.2 Satz. A sei eine $(n \times n)$-Matrix. Genau dann hat A eine Nichtnull-Diagonale, wenn die Einträge $\neq 0$ in je k Spalten $(k=1,\dots,n)$ zu mindestens k Zeilen gehören.

Man beachte, daß die Diagonalen einer quadratischen Matrix genau den Termen entsprechen, die in der Determinante der Matrix auftreten. Aus Satz 5.2 erhalten wir ein Kriterium dafür, daß jeder Term der Determinante verschwindet:

5.3 Satz (Frobenius 1912). Genau dann enthält jede Diagonale einer $(n \times n)$-Matrix A mindestens einen Eintrag 0, wenn A eine Untermatrix der Weite $n+1$ hat, die nur Einträge 0 enthält.

Beweis. Nach Satz 5.2 enthält genau dann jede Diagonale einen Eintrag 0, wenn es k Spalten von A gibt, für die sämtliche Einträge $\neq 0$ in $r < k$ Zeilen enthalten sind (für geeignetes k). Dann enthalten diese k Spalten aber in den übrigen $n-r > n-k$ Zeilen von A nur Einträge 0. Die entsprechende Untermatrix der Weite $n-r+k \geq n+1$ hat also nur Einträge 0. //

Wir geben jetzt eine wichtige Klasse von Matrizen an, für die es stets eine Nichtnull-Diagonale gibt. Eine $(n \times n)$-Matrix mit nicht-negativen reellen Einträgen heißt doppelt-stochastisch, wenn für jede Reihe die Summe aller Einträge in dieser Reihe $=1$ ist. Dann gilt:

5.4 Lemma (König 1916). Jede doppelt-stochastische Matrix hat eine positive Diagonale.

Beweis. Nach Definition ist hier bereits jede Nichtnull-Diagonale eine positive Diagonale. Wir können also Satz 5.2 verwenden. Angenommen, alle Einträge $\neq 0$ von gegebenen k Spalten gehören zu $r < k$ Zeilen; B sei die durch diese Zeilen und Spalten bestimmte Untermatrix. Dann ist die Summe aller Einträge von B sowohl $=k$ (spaltenweise addiert) als auch $\leq r$ (zeilenweise addiert). Widerspruch! //

Wie wir sehen werden, stehen die doppelt-stochastischen Matrizen in engem Zusammenhang zu den Permutationsmatrizen, also Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag 1 (und sonst nur Einträge 0) enthalten. Zunächst zeigen wir:

5.5 Satz (Zerlegungssatz). A sei eine $(n \times n)$-Matrix mit nicht-negativen reellen Einträgen, für die alle Reihensummen $=s$ sind. Dann ist A eine Linearkombination von

Permutationsmatrizen mit positiven reellen Koeffizienten.

Beweis. Dividiert man alle Einträge von A durch s, so erhält man eine doppelt-stochastische Matrix A'. Nach Lemma 5.4 hat A' (und somit auch A) eine positive Diagonale D. P sei die zu D gehörige Permutationsmatrix (d.h., P hat genau in den Zellen von D Einträge 1). Ferner sei c das Minimum der Einträge in D. Dann ist auch B := A-cP eine Matrix mit nicht-negativen reellen Einträgen und konstanter Reihensumme s-c. Ferner hat B mindestens einen Eintrag 0 mehr als A, weswegen die Behauptung mit Induktion folgt. //

5.6 Korollar (Lemma von König (1916)). A sei eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen 0 und 1, für die alle Reihensummen =k sind. Dann ist A die Summe von k Permutationsmatrizen.

Das folgt unmittelbar aus 5.5, da dann im Beweis stets c=1 ist. Das Lemma von König (und einige Verallgemeinerungen) ist ein wesentliches Hilfsmittel in der Endlichen Geometrie, genauer bei der rekursiven Konstruktion bestimmter Inzidenzstrukturen; siehe etwa Jungnickel (1979). Eine andere unmittelbare Folgerung aus Satz 5.5 ist das folgende klassische Resultat von Birkhoff; wir erinnern daran, daß in einem reellen Vektorraum die <u>konvexe Hülle</u> von Vektoren $x_1,\dots,x_n$ die Menge aller Linearkombinationen mit Koeffizienten $c_1,\dots,c_n \geq 0$ mit $c_1+\dots+c_n=1$ ist.

5.7 Satz (*Birkhoff 1946*). *Die konvexe Hülle der Permutationsmatrizen (im $\mathbb{R}^{(n,n)}$) ist die Menge der doppelt-stochastischen Matrizen.*

Weitere Sätze aus der kombinatorischen Matrixtheorie findet man in den Büchern von Mirsky (1971), Ford & Fulkerson (1962) und Jungnickel (1982). Z.B. kann man nach unteren Schranken für die maximale Summe (oder das maximale Produkt) aller Einträge einer positiven Diagonalen einer doppelt-stochastischen Matrix fragen. Hier ergeben sich auch interessante Zusammenhänge zu der bekannten van der Waerdenschen Permanentenvermutung, die vor einigen Jahren von Egoritsjev (1981) und Falikman (1981) bewiesen werden konnte. Wir erwähnen noch ein Beispiel aus der Kombinatorischen Optimierung, das mit den hier eingeführten Methoden gelöst werden kann.

5.8 Beispiel ("bottleneck assignment problem"). Gegeben sei eine $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit nicht-negativen reellen Einträgen; gesucht ist eine Diagonale von A, für die das Minimum der Einträge maximal wird. Wir können uns z.B. vorstellen, daß wir eine Zuordnung von Arbeitern zu Maschinen betrachten, bei der die Einträge von A irgendwie die Effizienz messen. Wir beginnen mit einer beliebigen Diagonalen D, für die das Minimum der Einträge etwa m sei. Als zulässig wählen wir nun genau die Zellen (i,j), für die $a_{ij} > m$ gilt. Offenbar gibt es genau dann eine Permutation mit Minimum $>m$, wenn A eine zulässige Diagonale besitzt. Das kann man aber überprüfen, indem man im zugehörigen bipartiten Graphen die maximale Mächtigkeit einer Korrespondenz bestimmt. Man beachte, daß man trivialerweise nach höchstens $O(n^2)$ derartigen Schritten das Problem gelöst hat.

Ähnlich kann auch das folgende berühmte Problem behandelt werden:

5.9 Beispiel ("assignment problem"). Gegeben sei eine $(n \times n)$-Matrix A mit nichtnegativen reellen Einträgen. Gesucht ist eine Diagonale von A, für die die Summe der Einträge maximal (bzw. minimal) wird.

Die eben angedeuteten Algorithmen zur Lösung der Probleme aus 5.8 und 5.9 sind noch keineswegs optimal. Trotzdem beruhen die besten bekannten Algorithmen für diese Problem letztlich auch auf einer Zurückführung auf die Bestimmung maximaler Korrespondenzen, vgl. etwa Lawler (1976), Papadimitriou & Steiglitz (1982) und Jungnickel (1986). Besondere Erwähnung verdient dabei der berühmte "ungarische Algorithmus" von Kuhn (1955) für die Lösung des assignment problem (mit Komplexität $O(n^3)$).

6. PARTIELLE ORDNUNGEN

Im Rahmen der Transversaltheorie wird oft auch die Kombinatorik partiell geordneter Mengen behandelt. Wir wollen hier den Satz von Dilworth behandeln. Es sei $(M,\leq)$ eine <u>partiell geordnete Menge</u>, d.h., $\leq$ ist reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv, Wir nennen zwei Elemente x und y von M <u>vergleichbar</u>, wenn $x < y$ oder $y < x$ gilt. Eine <u>Kette</u> ist eine Menge aus paarweise vergleichbaren Elementen von M, eine <u>Antikette</u> eine Menge aus paarweise unvergleichbaren Elementen.

6.1 Satz (Dilworth 1950). $(M,\leq)$ sei eine partiell geordnete endliche Menge. Dann ist die maximale Mächtigkeit einer Antikette gleich der minimalen Anzahl von Ketten, in die M zerlegt werden kann.

Wir wollen Satz 6.1 zunächst in die Sprache der Graphentheorie übersetzen. Dazu ordnen wir $(M,\leq)$ einen Digraphen G auf der Punktemenge M zu; dabei sei (x,y) (für $x \neq y$) genau dann eine Kante von G, wenn $x < y$ gilt. G ist dann ein transitiver, kreisfreier Digraph. Dabei heißt ein Digraph <u>transitiv</u>, wenn aus der Existenz eines gerichteten Weges von x nach y stets die Existenz der Kante (x,y) folgt; er heißt <u>kreisfrei</u>, wenn er keine gerichteten Kreise enthält. Eine Zerlegung von $(M,\leq)$ in

Ketten liefert eine Zerlegung von G, d.h., eine Menge von gerichteten Wegen, für die jeder Punkt von G auf genau einem der Wege liegt. Den Antiketten von M entsprechen die unabhängigen Punktemengen von G, d.h. Mengen von paarweise unverbundenen Punkten. Der Satz von Dilworth kann dann wie folgt formuliert werden:

6.1' Satz (Dilworth 1950). G sei ein transitiver, kreisfreier Digraph. Dann ist die maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Punktemenge gleich der minimalen Anzahl von Wegen in einer Zerlegung von G.

Man beachte, daß eine der beiden in Satz 6.1' enthaltenen Ungleichungen trivial ist: Jeder gerichtete Weg in G kann eine gegebene unabhängige Punktemenge höchstens einmal treffen (wegen der Transitivität). Jede Zerlegung muß also mindestens so viele Wege enthalten, wie es Punkte in einer maximalen unabhängigen Menge gibt. Die umgekehrte Ungleichung bleibt in beliebigen Digraphen gültig; der Satz von Dilworth ist also ein Spezialfall des folgenden Resultats:

6.2 Satz (Gallai & Milgram 1960). G sei ein Digraph; $\alpha(G)$ sei die maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Punktemenge von G. Dann gibt es eine Zerlegung von G in $\alpha(G)$ Wege.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Spezialfall eines kreisfreien Digraphen G und konstruieren aus G einen bipartiten Graphen G', dessen Punktemenge $V \dot{\cup} V'$ sei; dabei ist V die Punktemenge von G und V' eine isomorphe Kopie von V. Ferner sei $\{v,w'\}$ genau dann eine Kante von G', wenn (v,w) eine Kante von G ist. Wir zeigen zunächst, daß jede Korrespondenz der Mächtigkeit k von G' zur Konstruktion einer Zerlegung von G in n-k Wege (mit $n = |V|$) verwendet werden kann. Es seien also $(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k)$ Kanten von G, die den Kanten einer Korrespondenz K in G' entsprechen. Dann sind die v_i paarweise verschieden, und ebenso die w_j. Dagegen ist $w_i=v_j$ möglich; in diesem Fall setzen wir die Wege (v_i,w_i) und (v_j,w_j) zum Weg $(v_i,w_i=v_j,w_j)$ zusammen. Indem man so fortfährt (also jeweils gerichtete Wege mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endpunkten zusammensetzt), erhält man schließlich etwa c Wege, deren Punktemengen paarweise disjunkt sind. Die Längen dieser Wege seien $x_1,\dots,x_c$; dabei ist die Länge eines Weges die Anzahl seiner Kanten. Die übrigen $n-((x_1+1)+\dots+(x_c+1))$ Punkte von G teilen wir in triviale Wege der Länge 0 ein. Insgesamt ergibt sich so eine Zerlegung von V in $n-(x_1+\dots+x_c) = n-k$ Wege. Insbesondere können wir für k die maximale Mächtigkeit einer Korrespondenz in G' wählen. Nach Satz 3.1 ist k dann auch die minimale Mächtigkeit einer G' überdeckenden Punktemenge. Jede solche Menge induziert eine G überdeckende Punktemenge; also gilt $k \geq \beta(G)$, wobei $\beta(G)$ die minimale Mächtigkeit einer G überdeckenden Punktemenge W sei. Trivialerweise ist das Komplement von W eine unabhängige Punktemenge maximaler Mächtigkeit von G, d.h. es gilt $\alpha(G) = n-\beta(G)$. Somit haben wir G in $n-k \leq n-\beta(G) = \alpha(G)$ Wege zerlegt. //

Der Leser zeige an einem Beispiel, daß Satz 6.1' nicht für beliebige Digraphen gilt. Während die anderen Hauptsätze, die wir behandelt haben, nämlich die Sätze von Ford & Fulkerson, Menger, König-Egerváry, Hall und Dilworth, sämtlich "kombinatorisch äquivalent" sind (also sich ohne Schwierigkeiten auseinander ableiten lassen), ist kein Beweis für den allgemeinen Fall von Satz 6.2 mit den hier behandelten Methoden bekannt. Wir erwähnen einen weiteren berühmten Satz, der unmittelbar aus 6.2 folgt. Ein Turnier ist ein Digraph, der durch Orientierung aus einem vollständigen Graphen entsteht. Ein Hamiltonscher Weg in einem (gerichteten) Graphen ist ein (gerichteter) Weg, der jeden Punkt genau einmal enthält. Dann gilt:

6.3 Satz (Rédei 1934). Jedes Turnier besitzt einen Hamiltonschen Weg.

Beweis. Wenn G eine Orientierung eines vollständigen Graphen ist, gilt trivialerweise $\beta(G)=1$. Die Behauptung folgt aus Satz 6.2. //

Schließlich seien noch einige Folgerungen aus dem Satz von Dilworth erwähnt.

6.4 Korollar. $(M,\leq)$ sei eine partiell geordnete Menge mit mindestens $rs+1$ Elementen. Dann gibt es in M eine Kette der Mächtigkeit $r+1$ oder eine Antikette der Mächtigkeit $s+1$.

Beweis. Fall es keine Antikette der Mächtigkeit $s+1$ gibt, kann M nach Satz 6.1 in s Ketten zerlegt werden; mindestens eine dieser Ketten muß dann wenigstens $r+1$ Elemente enthalten. //

6.5 Satz (Erdös & Szekeres 1935). Jede reelle Folge der Länge $n \geq r^2+1$ enthält eine monotone Teilfolge der Länge $r+1$.

Beweis. Die Folge sei $(a_i)_{i=1,\dots,n}$. Wir setzen $M = \{(i,a_i): i=1,\dots,n\}$ und ordnen M partiell gemäß $(i,a_i) \leq (j,a_j)$ genau dann, wenn $i \leq j$ und $a_i \leq a_j$ gelten. Angenommen, M hat eine Antikette aus $r+1$ Elementen, deren erste Koordinaten etwa $i_1,\dots,i_{r+1}$ mit $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_{r+1}$ seien; dann bilden die zugehörigen zweiten Koordinaten eine streng monoton fallende Teilfolge der Länge $r+1$. Falls es keine derartige Antikette gibt, muß M nach 6.4 eine Kette der Länge $r+1$ enthalten; hier bilden die zweiten Koordinaten dann eine monoton steigende Teilfolge der Länge $r+1$. //

Interessanterweise gilt auch der zum Satz von Dilworth duale Satz; der Beweis dieses Resultats ist allerdings wesentlich einfacher und sei daher dem Leser überlassen.

6.6 Satz (Mirsky 1971a). $(M,\leq)$ sei eine endliche partiell geordnete Menge. Dann ist die maximale Mächtigkeit einer Kette von M gleich der minimalen Anzahl von Antiketten, in die M zerlegt werden kann.

Wir wollen noch einen weiteren bekannten Satz über partielle Ordnungen mit den Mitteln der Transversaltheorie beweisen:

6.7 Satz (Spernersches Lemma, Sperner 1928)). Die Potenzmenge 2^M der endlichen Menge M sei bzgl. der Inklusion partiell geordnet. Dann ist die maximale Mächtigkeit einer Antikette in $(2^M,\subset)$ die Zahl $\binom{n}{[n/2]}$.

Beweis. Offenbar bilden die Teilmengen der Mächtigkeit $[n/2]$ eine Antikette. Für die Umkehrung konstruieren wir den zu $(2^M,\subset)$ gehörenden Digraphen G, wie nach Satz 6.1 beschrieben. Nach Satz 6.1' genügt es nun, G in $[n/2]$ gerichtete Wege zu zerlegen. Die Punktemenge von G zerfällt in natürlicher Weise in n+1 Mengen von Punkten gleicher Mächtigkeit. Wir betrachten den bipartiten Graphen G_k, der von den Teilmengen der Mächtigkeit k bzw. k+1 induziert wird; dabei ist also $\{A,B\}$ für eine k-Teilmenge A und eine (k+1)-Teilmenge B von M genau dann eine Kante, wenn A in B enthalten ist. Wir zeigen, daß jedes G_k eine vollständige Korrespondenz besitzt; diese Korrespondenzen können dann zu der gewünschten Zerlegung von G zusammengesetzt werden. Es sei nun o.B.d.A. $k+1 \leq n/2$. Dann sind je j k-Teilmengen auf insgesamt $j(n-k)$ Kanten in G_k; da jede (k+1)-Teilmenge auf genau $k+1 \leq n/2$ Kanten von G_k liegt, liefern diese $j(n-k)$ Kanten mindestens $j(n-k)/(k+1) \geq j$ (k+1)-Teilmengen. Somit ist die Bedingung in Satz 3.4 erfüllt, und G_k besitzt in der Tat eine vollständige Korrespondenz. //

Satz 6.7 ist der Ausgangspunkt vielfältiger weiterer Untersuchungen über partiell geordnete Mengen, die man unter dem Namen "Sperner-Theorie" zusammenfaßt. Der Leser vergleiche dazu z.B. den Übersichtsartikel von Greene & Kleitman (1978).

Wir wollen noch einen weiteren Zusammenhang zwischen partiellen Ordnungen und Graphentheorie erwähnen. Wir ordnen jeder partiell geordneten Menge $(M,\leq)$ einen Graphen G auf der Punktemenge M zu; dabei sei $\{x,y\}$ genau dann eine Kante $(x\neq y)$, wenn x und y vergleichbar sind. Jeder derartige Graph heißt ein <u>Vergleichbarkeitsgraph</u>. Diese Graphen haben interessante Eigenschaften, für deren Beschreibung wir noch etwas Terminologie benötigen. Für jeden Graphen G bezeichnet $\alpha(G)$ die maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Menge (wie in 6.2), $\omega(G)$ die maximale Mächtigkeit einer <u>Clique</u> (also eines vollständigen Teilgraphen), $\theta(G)$ die Minimalzahl von Cliquen, in die G zerlegt werden kann, und $\gamma(G)$ die <u>chromatische Zahl</u> von G (also die Minimalzahl von Farben, die benötigt werden, wenn man die Punkte von G so färben will, daß adjazente Punkte stets verschieden gefärbt sind). Man beachte, daß $\gamma(G)$ die minimale Zahl von unabhängigen Punktemengen ist, in die G zerlegt werden kann. Offenbar gilt stets $\alpha(G) \leq \theta(G)$ und $\omega(G) \leq \gamma(G)$. Ein Graph heißt <u>perfekt</u>, wenn für jeden induzierten Untergraphen H die Bedingung $\alpha(H) = \theta(H)$ erfüllt ist. Ein berühmtes Resultat von Lovász (1972) besagt, daß dazu die Forderung $\omega(H) = \gamma(H)$

für alle induzierten Untergraphen H äquivalent ist ("perfect graph theorem"). Offenbar ist ein induzierter Untergraph eines Vergleichbarkeitsgraphen stets wieder ein derartiger Graph. Da Ketten in der partiell geordneten Menge M und Cliquen im zugehörigen Graphen G sowie Antiketten in M und unabhängige Punktemengen in G sich entsprechen, folgt aus Satz 6.1 sofort $\alpha(G) = \theta(G)$; ähnlich folgt aus Satz 6.6 $\omega(G) = \gamma(G)$. Somit haben wir beide möglichen Defininitionen der Perfektheit für jeden Vergleichbarkeitsgraphen verifiziert. Also gilt:

6.8 Satz. Jeder Vergleichbarkeitsgraph ist perfekt.

Der Leser verifiziere als Übung, daß auch jeder bipartitite Graph perfekt ist; für eine der beiden Bedingungen ist der Satz von König-Egervary hilfreich. Näheres über perfekte Graphen findet der Leser im Buch von Berge (1973).

7. ANZAHLSÄTZE

In diesem Abschnitt soll kurz über einige Anzahlsätze aus der Transversaltheorie berichtet werden. Da die hierfür benötigten Beweismethoden sich von den sonst in diesem Überblick aufgetretenen unterscheiden, verzichten wir hier auf sämtliche Beweise.

7.1 Satz (Ostrand 1970). $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n)$ sei eine Familie von Teilmengen einer Menge S, die die Bedingung (H) erfüllt und daher eine Transversale besitzt. Es sei $m_i := |A_i|$; o.B.d.A. gelte $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Dann gilt für die Anzahl $N(\mathbf{A})$ der SDR's von $\mathbf{A}$ die Abschätzung

$$(*) \qquad N(\mathbf{A}) \geq \prod_{i=1}^{n} (m_i - i + 1)_*,$$

wobei z_* eine Abkürzung für max $\{1,z\}$ sei. Diese Schranke ist bestmöglich, d.h. für jede monoton wachsende Folge $(m_1,\dots,m_n)$ natürlicher Zahlen gibt es eine Familie $\mathbf{A}$ mit $|A_i| = m_i$, für die in (*) die Gleichheit gilt.

Als nächstes wollen wir die Zahlen $N(\mathbf{A})$ mit einer auf Matrizen definierten Abbildung in Verbidnung bringen. Dazu eine Definition: $A = (a_{ij})$ sei eine $(m \times n)$-Matrix. Dann ist die <u>Permanente</u> per A von A durch

$$\text{per } A = \Sigma\, a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

definiert; dabei durchlaufen $i_1,\dots,i_m$ alle Folgen von m verschiedenen Elementen in $\{1,\dots,n\}$. Man beachte, daß somit für $m > n$ nach Definition per A = 0 ist. Für m=n gilt per A = per A^T. Sei jetzt $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n)$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge S, o.B.d.A. $S = \{1,\dots,m\}$. Die Inzidenzmatrix $A = (a_{ij})$ von $\mathbf{A}$ ist durch $a_{ij}=1$ für $i \in A_j$ und $a_{ij}=0$ sonst definiert. Dann gilt offenbar:

7.2 Lemma. Es ist $N(\mathbf{A})$ = per A^T.

Leider trägt 7.2 nicht allzuviel zu der Berechnung der Zahlen $N(\mathbf{A})$ bei. Obwohl sich per A (für $m=n$) von det A nur durch die Vorzeichen der Produkte unterscheidet, sind keine effektiven Verfahren zur Berechnung der Permanenten bekannt; so gilt z.B. das Analogon des Determinantenproduktsatzes keineswegs. Immerhin kann man einige bekannte Ungleichungen für Permanenten so zu Abschätzungen für die Anzahl von SDR's verwenden. Wir erwähnen zwei Beispiele.

7.3 Satz ("Mincsche Vermutung", Brégman 1973). A sei eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen 0 und 1, und die Zeilensummen von A seien $r_1,\dots,r_n$. Dann gilt

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} (r_i!)^{1/r_i}.$$

Ein einfacher Beweis für Satz 7.3 stammt von Schrijver (1978), siehe auch Jungnickel (1982). Mit 7.2 folgt unmittelbar eine obere Schranke für die Anzahl der SDR's einer Familie von n Teilmengen einer n-elementigen Menge. Als weiteres Beispiel verwenden wir die schon erwähnte van der Waerdensche Vermutung:

7.4 Satz (*Vermutung von van der Waerden 1926, Satz von Egoritsjev 1981 und* Falikman 1981). A sei eine doppelt-stochastische $(n\times n)$-Matrix. Dann gilt

$$\operatorname{per} A \geq n!/n^n$$

mit Gleichheit genau für die Matrix A, deren Einträge sämtlich $1/n$ sind.

7.5 Korollar. $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n)$ sei eine Familie von Teilmengen einer n-elementigen Menge S. Ferner habe jedes A_i genau k Elemente, und jedes $x \in S$ liege in genau k der A_i. Dann gilt $N(\mathbf{A}) \geq n!k^n/n^n$.

Beweis. A sei die Inzidenzmatrix von $\mathbf{A}$. Dann ist $\frac{1}{k}A$ eine doppelt-stochastische Matrix, weswegen nach 7.4 sofort per $(\frac{1}{k}A) \geq n!/n^n$ folgt. Man beachte nun per $A = k!\operatorname{per}(\frac{1}{k}A)$ und verwende Lemma 7.2. //

In geometrischer Sprechweise bilden Familien wie in 7.5 "qudratische taktische Konfigurationen"; spezielle derartige Strukturen sind in der Endlichen Geometrie von großer Bedeutung. Korollar 7.5 ist auch wichtig für eine Abschätzung der Anzahl Lateinischer Quadrate der Ordnung n, die dann wiederum interessante Konsequenzen in der Endlichen Geometrie hat. Diese Fragen sind in Jungnickel (1982) ausführlicher erörtert.

8. TRANSVERSALMATROIDE

In diesem und dem folgenden Abschnitt wollen wir noch die Zusammenhänge zwischen Transversal- und Matroidtheorie skizzieren. Es gibt viele Möglichkeiten, wie man den Begriff "Matroid" definieren kann; wir wählen hier eine algorithmische Definition. Unter einem Mengensystem wollen wir eine gegenüber der Inklusion abgeschlossene Teilmenge der Potenzmenge 2^M einer endlichen Menge verstehen. Die Elemente des Mengensystems S sollen unabhängige Teilmengen von M heißen. Das zu S gehörende Optimierungsproblem ist wie folgt erklärt: Für eine gegebene Gewichtsfunktion $w: M \to \mathbb{R}_0^+$ ist eine unabhängige Menge A zu bestimmen, deren Gewicht $w(A) := \sum_{a \in A} w(a)$ maximal ist. Ein Mengensystem heißt ein Matroid, wenn der in 8.1 unten beschriebene Greedy-Algorithmus das zugehörige Optimierungsproblem löst (für jede Gewichtsfunktion w).

8.1 Algorithmus ("Greedy algorithm"). Gegeben sei ein Mengensystem (M,S) und eine Gewichtsfunktion $w: M \to \mathbb{R}_0^+$.

(1) Man ordne die Elemente von M nach ihrem Gewicht an, etwa $M = \{e_1,\dots,e_m\}$ mit $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_m)$.
(2) $i \leftarrow 1$, $A \leftarrow \emptyset$.
(3) Falls $A \cup \{e_i\} \in S$, setze $A \leftarrow A \cup \{e_i\}$.
(4) Falls $i < m$, setze $i \leftarrow i+1$ und gehe nach (3).

Der bekannte Satz von Kruskal (1956) besagt dann gerade, daß die kreisfreien Teilmengen der Kantenmenge E eines Graphen G=(V,E) ein Matroid auf V bilden; derartige Matroide heißen graphische Matroide. Wir erwähnen eine weitere (triviale) Klasse von Beispielen: Wenn wir für S alle höchstens k-elementigen Teilmengen von M wählen, erhalten wir ein uniformes Matroid; für k=m, also $S = 2^M$, spricht man von einem freien Matroid. Der Leser überzeuge sich davon, daß die Korrespondenzen in einem (bipartiten) Graphen im allgemeinen kein Matroid auf der Punktemenge induzieren. Matroide sind ursprünglich von Whitney (1935) und unabhängig davon von van der Waerden (1937) in der 2. Auflage seiner "Modernen Algebra" als abstrakte Verallgemeinerung der linearen Unabhängigkeit eingeführt worden. Der folgende Satz gibt zwei äquivalente Definitionsmöglichkeiten an:

8.2 Satz. (M,S) sei ein Mengensystem. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) (M,S) ist ein Matroid.
(ii) Für $A,B \in S$ mit $|A| = |B|+1$ gibt es stets ein $a \in A \setminus B$, für das auch $B \cup \{a\}$ in S liegt.
(iii) Für jede Teilmenge X von M ist die Mächtigkeit der maximalen in X ent-

haltenen unabhängigen Mengen eine Konstante $\rho(X)$, der Rang von X.

Für den (nicht sonderlich schweren) Beweis von Satz 8.2 sei der Leser auf Papadimitriou & Steiglitz (1982) verwiesen. Die Definition von Matroiden über den Greedy-Algorithmus geht auf Edmonds (1971), Gale (1968) und Welsh (1968) zurück; Edmonds hatte sein Resultat bereits 1967 auf einer Tagung angekündigt. Wegen Satz 8.2 bilden die linear unabhängigen Spalten einer Matrix über einem Körper K (oder äquivalent dazu die linear unabhängigen Teilmengen einer endlichen Teilmenge M eines Vektorraums) ein Matroid; derartige Matroide heißen linear oder vektoriell (im Englischen auch "matric") und erklären die Wahl des Terms "Matroid". Es gibt noch viele weitere Definitionsmöglichkeiten für Matroide; man vergleiche dazu z.B. Welsh (1976), das Standardwerk über Matroide. Wir wollen jetzt zwei Klassen von Matroiden erwähnen, die in der Transversaltheorie von Interesse sind.

$G = (V,E)$ sei ein Graph und S die Menge derjenigen Teilmengen von V, die von einer Korrespondenz in G getroffen werden (vgl. die Definition nach 4.6). Wir behaupten, daß (V,S) ein Matroid ist. Dazu seien A und B zwei unabhängige Teilmengen mit $|A| = |B|+1$; ferner seien K und K' Korrespondenzen, die A bzw. B treffen. Falls es ein $a \in A \setminus B$ gibt, für das K' sogar $B \cup \{a\}$ trifft, ist Bedingung (ii) aus 8.2 direkt erfüllt. Anderenfalls sei X die symmetrische Differenz von K und K'. Man sieht leicht ein, daß X aus alternierenden Wegen und Kreisen (also Wegen und Kreisen, auf denen sich Kanten von K und K' abwechseln) besteht. Aus Anzahlgründen muß es einen alternierenden Weg geben, der einen Punkt $x \in A \setminus B$ mit einem Punkt $y \notin B$ verbindet, etwa den Weg W. Dann ist die symmetrische Differenz von K' mit W eine Korrespondenz, die $B \cup \{x\}$ trifft, also $B \cup \{x\} \in S$. Somit erfüllt S die Bedingung (ii) aus Satz 8.2, weswegen (V,S) ein Matroid ist. Dies ist der wesentliche Teil im Beweis des folgenden Satzes:

8.3 Satz (Edmonds & Fulkerson 1965). $G=(V,E)$ sei ein Graph und W eine Teilmenge von V. Ferner sei S die Menge aller Teilmengen A von W, die von einer Korrespondenz in G getroffen werden. Dann ist (W,S) ein Matroid.

Beweis. Wir haben die Behauptung für W=V bereits bewiesen. Offenbar ist aber für jedes Matroid (M,S) und für jede Teilmenge N von M die Einschränkung $(N,S|N)$ mit $S|N := \{A \subset N: A \in S\}$ wieder ein Matroid. //

Die in Satz 8.3 beschriebenen Matroide heißen Korrespondenz-Matroide ("matching matroids"). Es sei nun $\mathbf{A} = (A_1,\ldots,A_n)$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge S und G der zugehörige bipartite Graph auf $S \,\dot{\cup}\, T$ mit $T = \{1,\ldots,n\}$ (wie in Abschnitt 4). Dann sind die partiellen Transversalen von **A** gerade die Teilmengen von S, die von einer Korrespondenz in G getroffen werden. Damit folgt aus 8.3:

8.4 Korollar. A sei eine endliche Familie von Teilmengen einer endlichen Menge M, und S sei die Menge aller partiellen Transversalen von **A**. Dann ist (M,S) ein Matroid.

Die Matroide aus 8.4 heißen <u>Transversalmatroide</u>. Wegen Satz 8.2 haben alle maximalen partiellen Transversalen von **A** dieselbe Mächtigkeit. Insbesondere ergibt sich daraus ein weiterer Beweis von 4.6. Wir erwähnen eine spezielle Klasse von Transversalmatroiden:

8.5 Korollar. $M = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_k$ sei eine Zerlegung der endlichen Menge M. Ferner seien $d_1,\ldots,d_k$ natürliche Zahlen und

$$S = \{X \subset M: |X \cap A_i| \leq d_i \text{ für } i=1,\ldots,k\}.$$

Dann ist (M,S) ein Matroid.

Beweis. **A** sei die Mengenfamilie, die für $i=1,\ldots,k$ jeweils d_i Kopien von A_i enthält. Dann ist S gerade die Menge der partiellen Transversalen von **A**. Die Behauptung folgt aus 8.4. //

Die in 8.5 beschriebenen Matroide heißen <u>Partitionsmatroide</u>. Häufig wird dabei der Spezialfall $d_1=\ldots=d_k=1$ betrachtet. Wenn insbesondere M die Kantenmange eines Digraphen ist und die Zerlegung von M nach Kanten mit demselben Endpunkt gewählt wird, erhält man das "head partition matroid" des Digraphen.

Für weitere Resultate (z.B. die Tatsache, daß jedes Korrespondenz-Matroid ein lineares Matroid ist) sei der Leser auf die Literatur verwiesen, insbesondere auf Welsh (1976). Überraschend ist, daß jedes Korrespondenz-Matroid auch ein Transversalmatroid ist (Edmonds & Fulkerson 1965); allerdings ist keine Methode bekannt, mit der man stets eine Darstellung als Transversalmatroid konstruieren könnte.

9. UNABHÄNGIGE TRANSVERSALEN

Wir wollen in diesem Abschnitt den Heiratssatz auf Matroide verallgemeinern. Es sei also (M,S) ein Matroid und $\mathbf{A} = (A_1,\ldots,A_n)$ eine Familie von Teilmengen von M. Eine partielle Transversale von **A** heißt eine <u>unabhängige partielle Transversale</u>, wenn sie in S liegt. In der Situation des Heiratssatzes betrachten wir also das freie Matroid auf M. Die Bedingung (H) ist dann der Spezialfall der Bedingung (R) in Satz 9.2 unten. Zunächst benötigen wir aber noch einen Hilfssatz über die Rangfunktion eines Matroides.

9.1 Lemma. (M,S) sei ein Matroid mit Rangfunktion ρ. Dann gelten:

(R1) $\rho(A) \leq |A|$ für alle $A \subset M$.

(R2) ρ ist <u>isoton</u>, d.h. aus $A \quad B$ folgt $\rho(A) \leq \rho(B)$ für alle $A,B \subset M$.

(R3) ρ ist <u>submodular</u>, d.h. $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ für alle $A,B \subset M$.

Beweis. (R1) und (R2) sind trivialerweise erfüllt. Für (R3) wählen wir eine <u>Basis</u> X von $A \cap B$ (das ist eine maximale unabhängige Teilmenge von $A \cap B$). Wegen Satz 8.2 kann X zu einer Basis Y von $A \cup B$ ergänzt werden. Wir schreiben $Y \setminus X$ als $W \cup Z$ mit $W \subset A \setminus B$ und $Z \subset B \setminus A$. Dann sind $X \cup W$ bzw. $X \cup Z$ unabhängige in A bzw. B enthaltene Mengen. Somit folgt
$\rho(A \cup B)+\rho(A \cap B) = |Y|+|X| = |X \cup V|+|X \cup W| \leq \rho(A)+\rho(B)$. //

Man kann umgekehrt zeigen, daß es für jede Abbildung $\rho: 2^M \to \mathbb{N}_0$, die den Bedingungen (R1) bis (R3) genügt, ein eindeutig bestimmtes Matroid gibt, dessen Rangfunktion ρ ist; siehe z.B. Welsh (1976) oder Jungnickel (1982). Submodulare Funktionen sind überhaupt von großer Bedeutung für die Matroidtheorie, siehe z.B. Pym & Perfect (1970). Der folgende Satz von Rado - die angekündigte Verallgemeinerung des Heiratssatzes - wird heute meist als das Kernstück der Transversaltheorie angesehen, vgl. z.B. Mirsky (1969a).

9.2 Satz (Rado 1942). **(M,S)** sei ein Matroid und $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n)$ eine Familie von Teilmengen von M. Genau dann hat **A** eine unabhängige Transversale, wenn gilt:

(R) $\rho(\bigcup_{i \in J} A_i) \geq |J|$ für alle $J \subset \{1,\dots,n\}$.

Wir beweisen gleich die folgende Verallgemeinerung von Satz 9.2:

9.3 Satz (Defektform des Satzes von Rado; Perfect 1969). **(M,S)** sei ein Matroid und $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n)$ eine Familie von Teilmengen von M. Genau dann hat **A** eine unabhängige partielle Transversale der Mächtigkeit k, wenn gilt:

(*) $\rho(\bigcup_{i \in J} A_i) \geq |J|+k-n$ für alle $J \subset \{1,\dots,n\}$.

Beweis. Wir kürzen im Folgenden für jede Familie $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_n)$ und für jede Teilmenge J von $\{1,\dots,n\}$ die Vereinigung $\bigcup_{i \in J} B_i$ mit B(J) ab. Wir betrachten die Menge **F** aller Familien $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_n)$ mit

(**) $B_i \subset A_i$ für $i=1,\dots,n$ und $\rho(B(J)) \geq |J|+k-n$ für alle $J \subset \{1,\dots,n\}$.

Wir ordnen **F** partiell durch $\mathbf{B} \leq \mathbf{B'}$, falls $B_i \subset B_i'$ für $i=1,\dots,n$ gilt. Wir wählen nun eine Familie **B**, die bzgl. dieser Ordnung minimal ist, und behaupten, daß dann jedes B_i eine einelementige Menge ist. Anderenfalls sei o.B.d.A. $|B_1| \geq 2$, etwa $b',b'' \in B_1$. **B'** und **B"** seien die Familien, die aus **B** durch Ersetzen von B_1 durch $B_1' := B_1 \setminus \{b'\}$ bzw. durch $B_1'' := B_1 \setminus \{b''\}$ hervorgehen. Da **B** ein minimales Element von **F** ist, muß

(**) für B' wie für B" verletzt sein. Daher gibt es Teilmengen J' und J" von $\{1,\dots,n\}$ mit $\rho(B'(J')) < |J'|+k-n$ und $\rho(B''(J'')) < |J''|+k-n$, also

(§) $\rho(B'(J'))+\rho(B''(J'')) \leqq |J'|+|J''|+2(k-n)-2.$

Andererseits gilt $B'(J') \cup B''(J'') = B(J' \cup J'')$ und $B'(J') \cap B''(J'') \subset B((J' \cap J'') \smallsetminus \{1\})$, da 1 in J' wie in J" liegen muß. Mit Lemma 9.1 folgt wegen (R):

$$\begin{aligned}\rho(B'(J'))+\rho(B''(J'')) &\geqq \rho(B'(J') \cup B''(J'')) + \rho(B'(J') \cap B''(J''))\\ &\geqq \rho(B(J' \cup J'')) + \rho(B(J' \cap J'') \smallsetminus \{1\})\\ &\geqq |J' \cup J''| + |(J' \cap J'')\smallsetminus\{1\}| + 2(k-n)\\ &\geqq |J'| + |J''| + 2(k-n) - 1,\end{aligned}$$

im Widerspruch zu (§). //

Wir wollen eine Anwendung dieses Resultats auf gemeinsame partielle Transversalen *zweier Mengenfamilien geben. Zunächst noch ein Hilfssatz:*

9.4 Lemma. $A = (A_1,\dots,A_n)$ *sei eine Familie von Teilmengen der endlichen Menge* M und S die Menge der partiellen Transversalen von A. Dann gilt für die Rangfunktion von (M,S):

$$\rho(X) = \min\{|\bigcup_{i \in J} A_i \cap X| - |J| : J \subset \{1,\dots,n\}\} + n.$$

Beweis. X hat genau dann wenigstens den Rang k, wenn $(X \cap A_i)_{i=1,\dots,n}$ eine partielle Transversale der Mächtigkeit k besitzt. Wegen Satz 4.2 ist die Bedingung dafür

$$|\bigcup_{i \in J} A_i \cap X| \geqq |J|+k-n \quad \text{für alle } J \subset \{1,\dots,n\}.$$

Der Rang von X ist der größte Wert von k, für den diese Ungleichung erfüllt ist. //

9.5 Satz (Mirsky & Perfect 1967). $A = (A_1,\dots,A_n)$ und $B = (B_1,\dots,B_m)$ seien zwei Familien von Teilmengen einer endlichen Menge M. Genau dann haben A und B eine gemeinsame partielle Transversale der Mächtigkeit k, wenn gilt:

(MP) $|(\bigcup_{j \in J} A_j) \cap (\bigcup_{k \in K} B_k)| \geqq |J|+|K|+k-m-n$ für alle $J \subset \{1,\dots,n\}$ und alle $K \subset \{1,\dots,m\}$.

Beweis. Nach Satz 8.4 definieren die partiellen Transversalen von A ein Matroid auf M, dessen Rangfunktion ρ durch 9.4 gegeben ist. Eine gemeinsame partielle Transversale der Mächtigkeit k von A und B ist nun einfach eine im Transversalmatroid von A unabhängige partielle Transversale der Mächtigkeit k von B. Wegen 9.3 gibt es *genau dann eine derartige partielle Transversale, wenn für jedes* $K \subset \{1,\dots,m\}$ *gilt:*

(*) $\rho(\bigcup_{k \in K} B_k) \geqq |K|+k-m.$

Mit 9.4 wird aus (*) sofort (MP). //

Der Leser leite als Übung aus Satz 9.5 eine Formel für die maximale Mächtigkeit einer gemeinsamen partiellen Transversalen ab. Der interessanteste Spezialfall von 9.5 ist:

9.6 Korollar (Kriterium von Ford & Fulkerson 1958). $\mathbf{A} = (A_1,\ldots,A_n)$ und $\mathbf{B} = (B_1,\ldots,B_n)$ seien zwei Familien von Teilmengen einer endlichen Menge M. Genau dann haben **A** und **B** eine gemeinsame Transversale, wenn gilt:

$$\text{(FF)}\quad \left|\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cap \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right)\right| \geq |J|+|K|-n \quad \text{für alle } J,K \subset \{1,\ldots,n\}.$$

Mit ähnlichen Methoden kann man auch eine Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen Transversalen von **A** und **B**, die eine gegebene Teilmenge X von M enthält, angeben (Ford & Fulkerson 1958), siehe z.B. Jungnickel (1982). Wir wollen aus 9.6 noch ein Ergebnis ableiten, das auch - ohne Matroide - aus dem Heiratssatz erhalten werden könnte.

9.7 Satz (van der Waerden 1927). $M = A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n = B_1 \dot\cup \ldots \dot\cup B_n$ seien zwei Partitionen einer nr-elementigen Menge M in Teilmengen der Mächtigkeit r. Dann haben $(A_1,\ldots,A_n)$ und $(B_1,\ldots,B_n)$ eine gemeinsame Transversale.

Beweis. Da alle A_i und B_j r-elementig sind, gilt für alle $J,K \subset \{1,\ldots,n\}$:

$$\left|\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cap \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right)\right| \geq |J|r+|K|r-nr = (|J|+|K|-n)r.$$

Falls $|J|+|K| \geq n$ ist, folgt daraus (FF) aus 9.6; für $|J|+|K| < n$ ist (FF) trivialerweise erfüllt. //

9.8 Korollar (Miller 1910). H sei eine Untergruppe der endlichen Gruppe G. Dann besitzen die Familien der linken bzw. rechten Nebenklassen von H eine gemeinsame Transversale.

Zum Abschluß wollen wir noch die Umkehrung von Satz 9.2 beweisen. Wir erhalten damit eine weitere Charakterisierung der Matroide; zugleich zeigt sich, daß die Matroidtheorie der angemessene strukturelle Rahmen der Transversaltheorie ist.

9.9 Satz (Rado 1942). M sei eine endliche Menge und **S** eine Teilmenge von 2^M. Genau dann ist (M,**S**) ein Matroid, wenn die beiden folgenden Bedingungen für jede Familie $\mathbf{A} = (A_1,\ldots,A_n)$ von Teilmengen von M äquivalent sind:

(R) $\bigcup_{i\in J} A_i$ enthält für jedes $J \subset \{1,\ldots,n\}$ eine Menge $X \subset \mathbf{S}$ mit $|X|=|J|$.

(T) **A** hat eine Transversale $T \in \mathbf{S}$.

Beweis. Für Matroide gilt die genannte Äquivalenz nach Satz 9.2. Seien also umgekehrt (R) und (T) für jede Familie **A** äquivalent. Wir zeigen zunächst, daß **S** gegenüber der Inklusion abgeschlossen ist. Sei also $X \in S$; dann erfüllt die Familie $(\{x\})_{x \in X}$ Bedingung (T), also auch (R). Trivialerweise erfüllt dann für $Y \subset X$ auch die Familie $(\{y\})_{y \in Y}$ die Bedingung (R), also auch (T); daher muß $Y \in S$ gelten. Wir zeigen nun die Gültigkeit der Bedingung (ii) aus Satz 8.2; dann ist also (M,S) ein Matroid. Es seien $X,Y \in S$ mit $|X|=|Y|+1$, etwa $X = \{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ und $Y = \{y_1,\dots,y_n\}$. Wir betrachten $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_{n+1})$ mit $A_i = \{y_i\}$ für $i=1,\dots,n$ und $A_{n+1} = X$. Dann erfüllt die Teilfamilie $(A_1,\dots,A_n)$ Bedingung (T), also auch (R). Wir wollen zeigen, daß auch $\mathbf{A}$ Bedingung (R) erfüllt. Es genügt, $J \subset \{1,\dots,n+1\}$ mit $n+1 \in J$ zu betrachten; wegen $A_{n+1}=X$ ist dann (R) für solche J erfüllt. Somit erfüllt $\mathbf{A}$ auch die Bedingung (T), weswegen $\{y_1,\dots,y_n,x_i\}$ für mindestens ein $x_i \notin Y$ in S liegen muß. //

10. AUSBLICK

Der Verfasser hofft, in diesem Artikel einen Überblick über die wichtigsten Teile der Transversaltheorie gegeben zu haben. Dabei sollten die grundlegenden Sätze bewiesen werden; auch sollte der algorithmische Asepkt wenigstens angedeutet werden. Trotzdem ist dieser Aspekt insgesamt - besonders in den letzten Abschnitten - immer noch nicht genügend berücksichtigt worden. Wir müssen dafür auf die Literatur verweisen. Leider konnte auf einige Fragen überhaupt nicht eingegangen werden; insbesondere gilt das für die Transversaltheorie unendlicher Familien. Wir verweisen dafür auf Mirsky (1971) und Jungnickel (1982). Auch die Anwendungen der Transversaltheorie in der endlichen Geometrie (Parallelismen, Lateinische Quadrate, Inzidenzstrukturen mit gegebenen Graden) sind etwas zu kurz gekommen. Abgesehen von der eigentlichen Transversaltheorie sei dem Leser auch eine nähere Beschäftigung mit der Matroidtheorie (einem m.E. noch immer nicht hinreichend in seiner Wichtigkeit berücksichtigtem Gebiet) und der Kombinatorischen Optimierung empfohlen. Dabei seien die Bücher von Lawler (1976) und Welsh (1976) nochmals nachdrücklich erwähnt.

LITERATURVERZEICHNIS

Berge, C. (1957). Two theorems in graph theory. Proc. Nat. Acad. Sci. US **43**, 842-844.

Berge, C. (1973). Graphs and hypergraphs. North Holland, Amsterdam/London.

Birkhoff, G. (1946). Tres observaciones sobre el algebra lineal. Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A **5**, 147-151.

Brégman, L.M. (1973). Certain properties of nonnegative matrices and their permanents. Sovj. Math. Dokl. **14**, 945-949.

Dilworth, R.P. (1950). A decomposition theorem for partially ordered sets. Annals Math. **51**, 161-166.

Dinic, E. (1970). Algorithms for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation. Sovj. Math. Dokl. **11**, 1277-1280.

Edmonds, J. (1965). Paths, trees and flowers. Canad. J. Math. **17**, 449-467.

Edmonds, J. (1971). Matroids and the greedy algorithm. Math. Progr. **1**, 127-136.

Edmonds, J. & Fulkerson, D.R. (1965). Transversals and matroid partition. J. Res. NBS **69 B**, 147-153.

Edmonds, J. & Karp, R.M. (1972). Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. J. ACM **19**, 248-264.

Egervary, E. (1931). Matrixok kombinatorius tulajdonságairól (Ungarisch mit deutscher Zusammenfassung). Mat. Fiz. Lapok **38**, 16-28.

Egoritsjev, G.P. (1981). Solution of van der Waerden's permanent conjecture. Adv. Math. **42**, 299-305.

Erdös, P. & Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. Compositio Math. **2**, 463-470.

Even, S. (1979). Graph algorithms. Computer Science Press, Rockville, Md.

Falikman, D.I. (1981). A proof of the van der Waerden conjecture on the permanent of a doubly stochastic matrix (Russisch). Matemat. Zam. **29**, 931-938.

Ford, L.R. & Fulkerson, D.R. (1956). Maximal flow through a network. Canad. J. Math. **8**, 399-404.

Ford, L.R. & Fulkerson, D.R. (1958). Network flow and systems of representatives. Canad. J. Math. **10**, 78-84.

Ford, L.R. & Fulkerson, D.R. (1962). Flows in networks. Princeton University Press

Frobenius, G. (1912). Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., pp.456-477.

Gale, D. (1968). Optimal assignments in an ordered set: An application of matroid theory. J. Comb. Th. **4**, 176-180.

Gallai, T. & Milgram, A.N. (1960). Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei. Acta. Sci. Math. **21**, 181-186.

Garey, M.R. & Johnson, D.S. (1979). Computers and intractability. Freeman, New York.

Gondran, M. & Minoux, M. (1984). Graphs and algorithms. Wiley, New York.

Greene, C. & Kleitman, D.J. (1978). Proof techniques in the theory of finite sets. In: Studies in combinatorics, pp.22-79. The Math. Ass. of America

Hall, M. (1956). An algorithm for distinct representatives. Amer. Math. Monthly **63**, 716-717.

Hall, P. (1935). On representatives of subsets. J. London Math. Soc. **10**, 26-30.

Halmos, P.R. & Vaughan, H.E. (1950). The marriage problem. Amer. J. Math. **72**, 214-215.

Hopcroft, J. & Karp, R.M. (1973). An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs. SIAM J. Comp. **2**, 225-231.

Hopcroft, J. & Tarjan, R.E. (1972). Dividing a graph into triconnected components. SIAM J. Comp. **2**, 135-158.

Jungnickel, D. (1979). Die Methode der Hilfsmatrizen. In: Contributions to geometry, pp. 388-394. Birkhäuser, Basel.

Jungnickel, D. (1982). Transversaltheorie. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Jungnickel, D. (1986). Graphen, Netzwerke und Algorithmen. Eine Einführung. *Erscheint im Bibliographischen Institut, Mannheim.*

König, D. (1916). Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. Math. Annalen **77**, 453-465.

König, D. (1931). Graphok és matrixok (Ungarisch mit deutscher Zusammenfassung). Mat. Fiz. Lapok **38**, 116-119.

Kruskal, J.B. (1956). On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 48-50.

Kuhn, H.W. (1955). The hungarian method for the assignment problem. Naval Res. Log. Quart. **2**, 83-97.

Lawler, E.L. (1976). Combinatorial optimization: Networks and matroids. Holt, Rinehart & Winston, New York.

Lesk, M., Plummer, M.D. & Pulleyblank, W.R. (1984). Equi-matchable graphs. In: Graph theory and combinatorics, pp.239-254. Academic Press.

Lovász, L. (1972). Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. Discr. Math. **2**, 253-267.

Malhotra, V.M., Kumar, M.P. & Maheshwari, S.N. (1978). An $O(|V|^3)$ algorithm for maximum flow in networks. Inf. Proc. Letters **7**, 277-278.

Mendelsohn, N.S. & Dulmage, A.L. (1958). Some generalizations of the problem of distinct representatives. Canad. J. Math. **10**, 230-241.

Menger, K. (1927). Zur allgemeinen Kurventheorie. Fund. Math. **10**, 96-115.

Miller, G.A. (1910). On a method due to Galois. Quart. J. Pure Appl. Math. **41**,382-384.

Mirsky, L. (1969). Hall's criterion as a 'self-refining' result. Monatshefte für Math. **73**, 139-146.

Mirsky, L. (1969a). Transversal theory and the study of abstract independence. J. Math. Analysis Appl. **25**, 209-217.

Mirsky, L. (1971). Transversal theory. Academic Press, New York.

Mirsky, L. (1971a). A dual of Dilworth's decomposition theorem. Amer. Math. Monthly **78**, 876-877.

Mirsky, L. & Perfect, H. (1967). Applications of the notion of independence to combinatorial analysis. J. Comb. Th. **2**, 327-357.

Ostrand, P.A. (1970). Systems of distinct representatives II. J. Math. Analysis Appl. **32**, 14.

Papadimitriou, C.H. & Steiglitz, K. (1982). Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Perfect, H. (1969). A generalization of Rado's theorem on independent transversals. Proc. Cambridge phil. Soc. **66**, 513-515.

Pym, J.S. & Perfect, H. (1970). Submodular functions and independence structures. J. Math. Analysis Appl. **30**, 1-31.

Rado, R. (1942). A theorem on independence relations. Quarterly J. Math. (Oxford) **13**, 83-89.

Rédei, L. (1934). Ein kombinatorischer Satz. Acta Litt. Szeged **7**, 39-43.

Schrijver, A. (1978). A short proof of Minc's conjecture. J. Comb. Th. A **25**, 80-83.

Sperner, E. (1928). Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Z. **27**, 544-548.

Syslo, M.M., Deo, N. & Kowalik, J.S. (1983). Discrete optimization algorithms. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Tarjan, R.E. (1972). Depth first search and linear graph algorithms. SIAM J. Comp. **1**, 146-160.

van der Waerden, B.L. (1926). Aufgabe 45. Jahresber. DMV **35**, 117.

van der Waerden, B.L. (1927). Ein Satz über Klasseneinteilungen von endlichen Mengen. Abh. Math. Sem. Hamburg **5**, 185-188.

van der Waerden, B.L. (1937). Moderne Algebra, 2.Auflage. Springer, Berlin.

Welsh, D.J.A. (1968). Kruskal's theorem for matroids. Proc. Cambridge Phil. Soc. **64**, 3-4.

Welsh, D.J.A. (1976). Matroid theory. Academic Press, New York.

Whitney, H. (1932). Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math. **54**, 150-168.

Whitney, H. (1935). On the abstract properties of linear dependence. Amer. J. Math. **57**, 509-533.

Dieter Jungnickel
Mathematisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen
Arndtstr. 2
6300 Gießen